1. KULONOV ZAKON, JAČINA ELEKTRIČNOG POLJA, POTENCIJAL I NAPON

Kulonov zakon*: sila kojom se privlače ili odbijaju dva tačkasta naelektrisanja upravo je proporcionalna njihovim količinama elektriciteta, a obrnuto proporcionalna kvadaratu međusobnog rastojanja:*

$$F = k\frac{Q_1 \cdot Q_2}{r^2} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{Q_1 \cdot Q_2}{r^2}$$

gde je $k = 9 \cdot 10^9\ Nm^2/C^2$ *ili dielektrična konstanta vakuuma* $\varepsilon_0 = 8{,}85 \cdot 10^{-12}\ C^2/Nm^2 = 8{,}85 \cdot 10^{-12}\ F/m$

Potencijal električnog polja *u nekoj tački brojno je jednak potencijalnoj energiji koju bi imalo telo jedinične količine elektriciteta dovedeno u tu tačku. Jedinica za potencijal je* ***VOLT****. Potencijal električnog polja na rastojanju* **r** *od « izvora » polja iznosi:*

$$\varphi = k\frac{Q}{r} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{Q}{r}$$

Ako električno polje potiče od više tačkastih naelektrisanja, rezultujući potencijal jednak je algebarskom zbiru potencijala koji su izazvani svakim naelektrisanjem pojedinačno:

$$\varphi = \varphi_1 + \varphi_2 + \cdots + \varphi_n$$

Napon *između tačke A (koja je na rastojanju* r_A *od izvora radijalnog električnog polja) i tačke B (koja je na rastojanju* r_B *od izvora radijalnog električnog polja) jednak je razlici potencijala:*

$$U_{AB} = \varphi_A - \varphi_B = kQ\left(\frac{1}{r_A} - \frac{1}{r_B}\right) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}Q\left(\frac{1}{r_A} - \frac{1}{r_B}\right)$$

Jedinica za napon je ***VOLT.*** *Pri pomeranju «naelektrisanja» q iz tačke A u tačku B sile električnog polja obave rad koji se može izračunati:*

$$A_{AB} = qU_{AB} = q(\varphi_a - \varphi_b) = kqQ\left(\frac{1}{r_A} - \frac{1}{r_B}\right) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \cdot qQ\left(\frac{1}{r_A} - \frac{1}{r_B}\right)$$

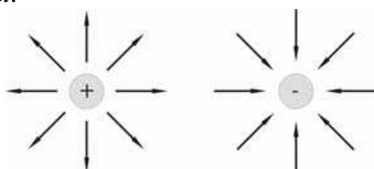
Jačina električnog polja *u nekoj tački brojno je jednaka sili kojom bi polje delovalo na jediničnu količinu elektriciteta dovedeno u tu tačku:*

$$\vec{E} = \frac{\vec{F}}{Q}$$

gde je $\vec{F}$ sila kojom bi polje delovalo na telo količine elektriciteta q dovedeno u posmatranu tačku. Jedinica za jačinu električnog polja je jedan ***NJUTN po KULONU*** *ili jedan* ***VOLT po METRU*** *(1N/C ili 1V/m). Jačina električnog polja koje stvara tačkasto naelektrisanje Q u tački koja je od njega udaljena za r može se izračunati po obrascu:*

$$E = k\frac{Q}{r^2} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{Q}{r^2}$$

Ako polje potiče od pozitivnog tačkastog naelektrisanja vektor jačine polja usmeren je od tog naelektrisanja, a ako je izvor polja negativan vektor jačine polja je usmeren ka njemu.



Kapacitet provodnika *brojno je jednak količini elektriciteta koju treba dovesti tom provodniku da bude na jediničnom potencijalu. Jedinica za kapacitet je* ***FARAD****:*

$$1F = \frac{1C}{1V}$$

Kapacitet kondenzatora *brojno je jednak količini elektriciteta koju treba dovesti tom kondenzatoru da mu se napon poveća za 1V.*

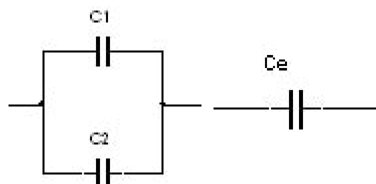
$$C = \frac{Q}{U}$$

Kapacitet ravnog kondenzatora *nalazi se po obrascu:*

$$C = \varepsilon_0 \varepsilon_r \frac{S}{d}$$

gde je S-površina ploča, d-rastojanje između ploča, ε_0-dielektrična konstanta vakuuma i ε_r-relativna dielektrična konstanta

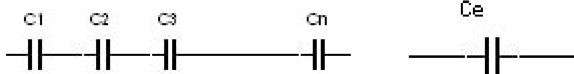
Ekvivalentni kapacitet paralelno vezanih kondenzatora *jednak je zbiru kapaciteta tih kondenzatora:*



$$C_e = C_1 + C_2 + C_3 + ... + C_n = \sum_{i=1}^{n} C_i$$

Recipročna vrednost ekvivalentnog kapaciteta redno vezanih kondenzatora *jednaka je zbiru recipročnih vrednosti kapaciteta tih kondenzatora:*

$$\frac{1}{C_e} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} + ... + \frac{1}{C_n} = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{C_i}$$

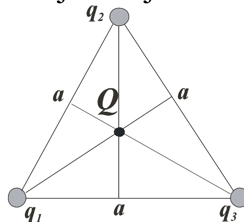


Energija kondenzatora *kapacitivnosti C može se odrediti na osnovu izraza*

$$W = \frac{1}{2}QU = \frac{1}{2}CU^2 = \frac{1}{2}\cdot\frac{Q^2}{C}$$

gde je Q – količina elektriciteta na elektrodama kondenzatora, a U – napon između njih.

1.1 Tri jednaka pozitivna opterećenja q su u temenima jednakostraničnog trougla. Kakvo i koliko naelektrisanje Q treba postaviti u težište trougla da bi rezultujuća sila na svako opterećenje bila jednaka nuli?

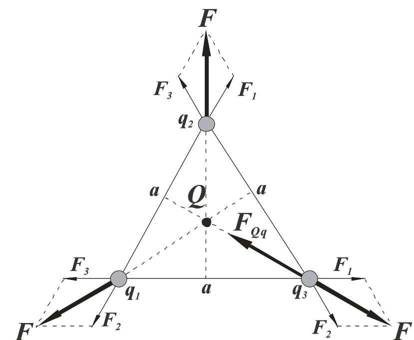


REŠENJE:

Sila $\vec{F}$ na jedno naelektrisanje potiče od Kulonove sile druga dva naelektrisanja i jednaka je vektorskom zbiru tih sila.

$\vec{F} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2$

Smer sila je kao na slici, a intenzitet je:



$$F_1 = F_2 = k\frac{q^2}{a^2}$$

$$F = 2F_1\cos 30^o = 2F_2\cos 30^o = 2\cdot k\frac{q^2}{a^2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$F = k\sqrt{3}\frac{q^2}{a^2}$$

Da bi rezultujuća sila na naelektrisanju Q bila jednaka nuli intenziteti sila F_{Qq} i F moraju biti jednaki, a suprotnog smera i zato naelektrisanje Q mora biti negativno da bi se ove dve sile poništile. Količinu naelektrisanja nalazimo iz uslova:

$$F_{Qq} = F$$

$$h = \frac{a\sqrt{3}}{2}$$

$$F_{Qq} = k\frac{Q\cdot q}{\left(\frac{2}{3}\cdot\frac{a\sqrt{3}}{2}\right)^2} = k\frac{Q\cdot q}{\left(\frac{a\sqrt{3}}{3}\right)^2} = k\frac{9\cdot Q\cdot q}{3a^2} = 3k\frac{Qq}{a^2}$$

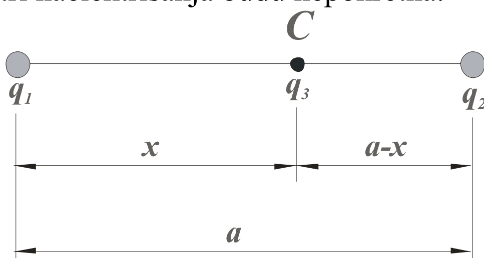
$$F = k\frac{q^2\sqrt{3}}{a^2} \Rightarrow k\frac{q^2\sqrt{3}}{a^2} = 3k\frac{Qq}{a^2}$$

$$3Q = q\sqrt{3}$$

$$Q = \frac{\sqrt{3}}{3} q$$

Rešenje pokazuje da količina elektriciteta Q zavisi samo od količine pozitivnog naelektrisanja q u temenima i da je nezavisno od rastojanja a.

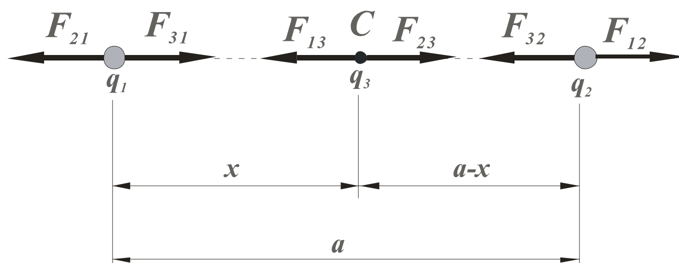
1.2 Tačkasta naelektrisanja q_1=4nC i q_2=1nC nalaze se na rastojanju a=60cm. Odrediti položaj C tačkastog naelektrisanja q_3 tako da posle postavljanja naelektrisanja q_3 sva tri naelektrisanja budu nepokretna.



REŠENJE:

Ako sa x označimo rastojanje tačkastog naelektrisanja q_1 od tačke C gde treba da se postavi naelektrisanje q_3 tada je rastojanje tačke C do naelektrisanja q_2 iznosi $a-x$ .Da bi posle postavljanja naelektrisanja sistem bio nepokretan treba da intenziteti sila zadovolje sledeći uslov:

$$F_{13} = F_{23}$$



a smerovi su označeni na slici.

$$\frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{q_1 \cdot q_3}{x^2} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{q_2 \cdot q_3}{(a-x)^2}$$

$$\frac{q_2}{q_1} x^2 = a^2 - 2ax + x^2$$

$$x^2 = 4a^2 - 8ax + 4x^2$$

$$3x^2 - 8ax + 4a^2 = 0$$

$$x^2 - \frac{8 \cdot 60}{3} x + 4 \frac{60 \cdot 60}{3} = 0$$

$$x^2 - 160x + 4800 = 0$$

Ovo je kvadratna jednačina čija su rešenja x_1 i x_2 .

$$x_{1/2}=\frac{160\pm\sqrt{160\cdot160-4\cdot4800}}{2}$$

$$x_{1/2}=\frac{160\pm10\sqrt{16\cdot16-4\cdot4\cdot12}}{2}$$

$$x_{1/2}=\frac{160\pm40\sqrt{16-12}}{2}=\frac{160\pm80}{2}$$

$$x_1=\frac{160+80}{2}=120cm \quad \rightarrow \text{ovo resenje treba odbaciti jer je } x \succ a$$

$$x_2=\frac{160-80}{2}=40cm$$

$$F_{12}=F_{32}$$

$$\frac{q_1\cdot q_2}{a^2}=\frac{q_3\cdot q_2}{(a-x)^2}$$

$$q_3=\left(\frac{a-x}{a}\right)^2=4\cdot\left(\frac{60-40}{60}\right)^2=4\cdot\frac{1}{9}$$

$$q_3=0.444nC$$

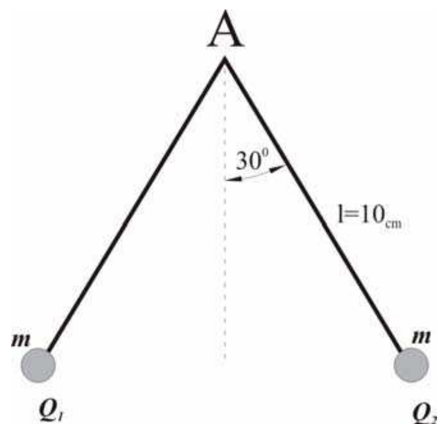
$$F_{21}=F_{31}$$

$$\frac{q_1\cdot q_2}{a^2}=\frac{q_3\cdot q_1}{x^2}$$

$$q_3=q_2\left(\frac{x}{a}\right)^2=1\cdot\left(\frac{40}{60}\right)^2=\frac{4}{9}$$

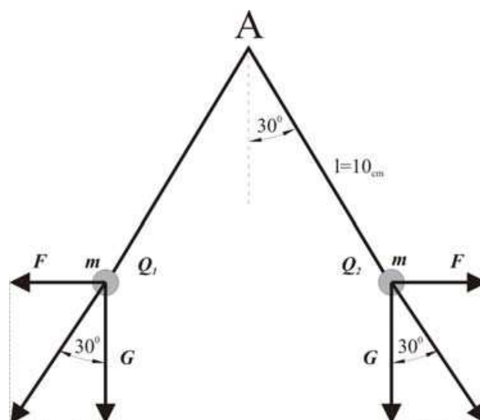
$$q_3=0.444nC$$

1.3 Dve veoma male kuglice, istih masa $m_1=m_2=m$, vise o končićima jednake dužine $l=10cm$ koji su učvršćeni u tački A. Kada se kuglicama dovedu količine elektriciteta $Q_1=Q_2=Q=10pC$ one se odbijaju tako da svaki končić gradi sa vertikalom ugao $\alpha=30^o$. Odrediti masu kuglica.



Napomena: Kuglice smatrati tačkastim naelektrisanjima. Masu končića zanemariti. Sistem se nalazi u vakuumu.

REŠENJE:



$$\frac{F}{G} = tg30^0$$

$$F = \frac{kQ_1Q_2}{l^2} = k\frac{Q^2}{l^2}$$

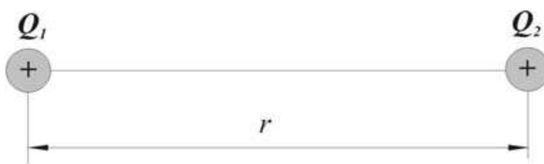
$$G = mg$$

$$m = \frac{kQ^2}{\left(gl^2 tg30^0\right)} = 1{,}589 \cdot 10^{-11}\,kg$$

1.4 Dva tela naelektrisana količinama elektriciteta Q_1 ***i*** Q_2 nalaze se u vakuumu na rastojanju $r=1m$. Odrediti tačku u kojoj je sila koja deluje na jedinicu pozitivnog naelektrisanja jednaka nuli i to kada je:

a) $Q_1=10\mu C$ $Q_2=15\mu C$
b) $Q_1=10\mu C$ $Q_2=-15\mu C$
c) $Q_1=-10\mu C$ $Q_2=-15\mu C$

Dimenzije tela su male u odnosu na rastojanje.



REŠENJE:

a) Oba tela su pozitivno naelektrisana. Rezultantno polje je:

$$\vec{E} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2$$

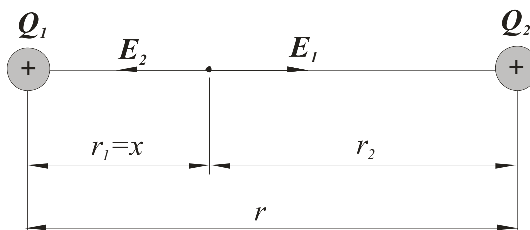
a biće jednako nuli ako je $\vec{E}_1 = -\vec{E}_2$

$$E_1 = E_2$$

$$\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\frac{Q_1}{r_1^{\,2}} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\frac{Q_2}{r_2^{\,2}}$$

$$r_1 = x$$

$$r_2 = r - x$$



$$\frac{Q_1}{x^2} = \frac{Q_2}{(r-x)^2}$$

$$\frac{10\cdot 10^{-6}}{x^2} = \frac{15\cdot 10^{-6}}{(1-x)^2}$$

$$x_1 = 0{,}45m$$

$$x_2 = -4{,}45m$$

Pošto x treba da bude na duži koja spaja naelektrisanja Q_1 i Q_2 ($0<x<r$) dobija se da je
$x = 0,45m$

b) Naelektrisanje Q_1 je pozitivno, a naelektrisanje Q_2 je negativno. Tražena tačka se nalazi na pravoj koja spaja naelektrisanja i to levo od Q_1 ili desno od Q_2, a to zavisi od apsolutnih vrednosti Q_1 i Q_2. Tačka je bliža onoj količini elektriciteta koja ima manju apsolutnu vrednost. Iz uslova da su intenziteti polja E_1 i E_2 jednaki dobija se

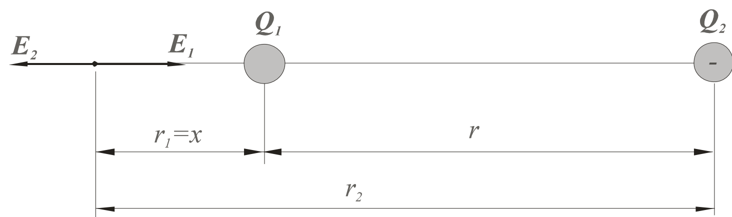
$$\frac{Q_1}{r_1^2} = \frac{|Q_2|}{r_2^2}$$

$$\frac{Q_1}{x^2} = \frac{|Q_2|}{(r+x)^2}$$

$$\frac{1 \cdot 10^{-6}}{x^2} = \frac{15 \cdot 10^{-6}}{(1+x)^2}$$

$$x_1 = -0,45m$$

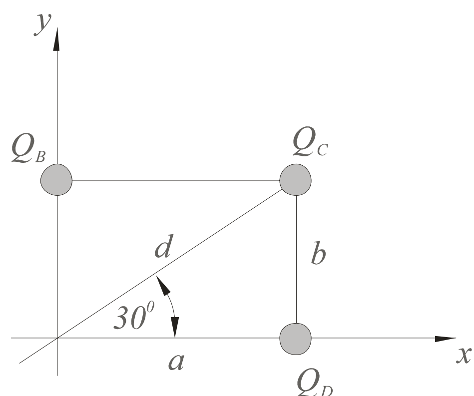
$$x_2 = 4,45m$$



Pošto x treba da bude van duži koja spaja Q_1 i Q_2 rešenje je $x=4.45m$.

c) Oba naelektrisanja su negativna. Rezultat je isti kao i u slučaju pod a).

1.5 Tri tačkasta naelektrisanja $Q_B=-2pC$, $Q_D=5pC$ i $Q_C=16pC$, raspoređena su u temenima B, D i C pravougaonika stranica $a = 10\sqrt{3}cm$ i $b = 10cm$. Odrediti električno polje $\vec{E}$ u temenu A, ako se sistem nalazi u vakuumu.



REŠENJE:

Prema oznakama sa slike je:

$d^2 = a^2 + b^2$

$d^2 = \left(10\sqrt{3}\right)^2 + 10^2 = 400cm^2$

$d = \sqrt{400} = 20cm$

$\sin\alpha = \sin 30^0 = \frac{1}{2}$

$\cos\alpha = \cos 30^0 = \frac{\sqrt{3}}{2}$

$E_x = 0 - E_D - E_C \cos\alpha = 4.57 \, N/C$

$E_y = E_B + 0 - E_C \sin\alpha = 0$

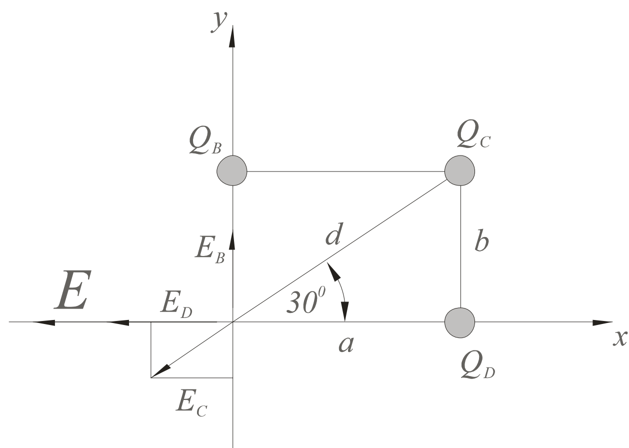
$E_B = k\frac{Q_B}{b^2} = 1.79\frac{N}{C}$

$E_C = k\frac{Q_C}{d^2} = 3.59\frac{N}{C}$

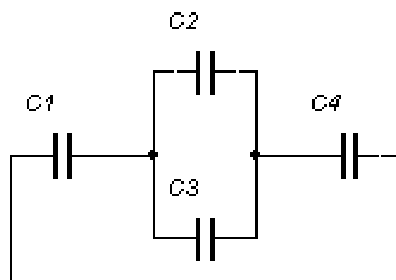
$E_D = k\frac{Q_D}{a^2} = 1.49\frac{N}{C}$

$E = \sqrt{E_x{}^2 + E_y{}^2} = \sqrt{4.57^2 + 0} = 4.57\frac{N}{C}$

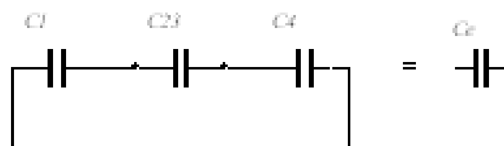
(Vektor $\vec{E}$ leži na x osi)



1.6 Odredi ekvivalentni kapacitet baterije prikazane na slici.



REŠENJE:

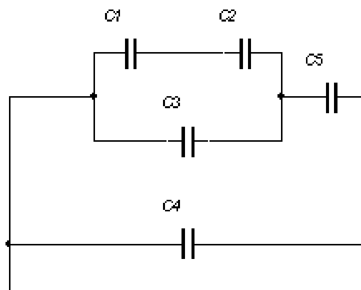


$C_{23} = C_2 + C_3$

$$\frac{1}{C_e} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2 + C_3} + \frac{1}{C_4}$$

$$C_e = \frac{C_{14}C_{23}}{C_{14} + C_{23}} = \frac{\frac{C_1C_4}{C_1 + C_4}(C_2 + C_3)}{\frac{C_1C_4}{C_1 + C_4} + (C_2 + C_3)} = \frac{C_1C_4(C_2 + C_3)}{C_1C_4 + (C_1 + C_4)(C_2 + C_3)}$$

1.7 Na slici su naznačeni kapaciteti kondenzatora u μF. Bez pisanja formula odredi ekvivalentni kapacitet i količinu elektriciteta na ekvivalentnom kondenzatoru. $C_1 = C_2 = 10\mu F, C_3 = 1\mu F, C_4 = 6\mu F$ i $C_5 = 3\mu F, U = 12V$



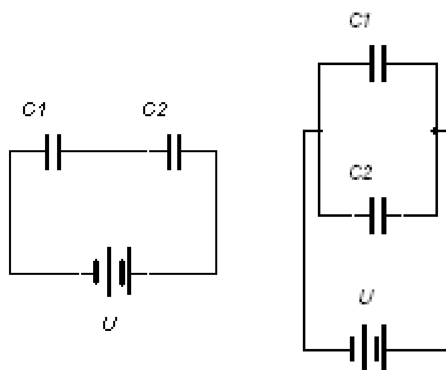
REŠENJE:

U jednoj grani imamo dva jednaka kondenzatora od po $10\mu F$ redno vezana. Njih možemo zameniti jednim kondenzatorom čiji je kapacitet upola manji od kapaciteta jednog kondenzatora tj. $5\mu F$. Ovaj kondenzator je paralelno vezan sa kondenzatorom kapaciteta $1\mu F$. Njihov ekvivalentni kapacitet jednak je zbiru kapaciteta tako da se dobije $6\mu F$. Ovaj kondenzator je redno vezan sa kondenzatorom kapaciteta $3\mu F$, pa je njihov ekvivalentni kapacitet jednak količniku njihovog proizvoda i njihovog zbira. Na taj način se dobija da je njihov ekvivalentni kapacitet jednak $2\mu F$. Ovaj kondenzator je paralelno vezan sa kondenzatorom kapaciteta $6\mu F$. Ukupni ekvivalentni kapacitet jednak je zbiru ova dva tj. $8\mu F$. Količina elektriciteta na tom kondenzatoru bila bi jednaka proizvodu ekvivalentnog kapaciteta i napona tj. $96\mu C$.

1.8 Dva kondenzatora čiji su kapaciteti $C_1 = 6\mu F$ i $C_2 = 3\mu F$ vezani su

a) redno
b) paralelno

Kolike količine elektriciteta će da budu na pozitivnim pločama tih kondenzatora, ako takvu vezu kondenzatora priključimo na izvor napona $U = 10V$?



REŠENJE:

a) Na redno vezanim kondenzatorima moraju biti jednake količine elektriciteta. Ta količina elektriciteta jednaka je količini elektriciteta na njihovom ekvivalentnom kondenzatoru. Ekvivalentni kapacitet jednak je rednoj vezi kondenzatora C_1 i C_2 pa je:

$$C_e = \frac{C_1 C_2}{C_1 + C_2}$$

Prema tome

$$Q_1 = Q_2 = Q_e = C_e U = \frac{C_1 C_2}{C_1 + C_2} U = 20 \mu C$$

b) Kod paralelno vezanih kondenzatora naponi su isti na oba kondenzatora pa je:

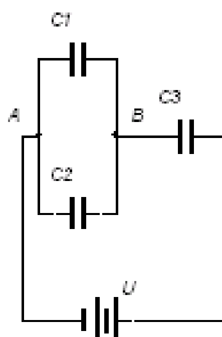
$$Q_1 = C_1 U = 60 \mu C$$

$$Q_2 = C_2 U = 30 \mu C$$

1.9 Kapaciteti kondenzatora prikazanih na slici su $C_1 = 4nF$, $C_2 = 2nF$ i $C_3 = 3nF$, dok je napon $U = 18V$.

a) Odredi količinu elektriciteta na kondenzatoru C_2

b) Kako se menja napon na kondenzatoru C_3 ako dođe do proboja kondenzatora C_2 ?



REŠENJE:

a)

$C_{12} = C_1 + C_2 = 4nF + 2nF = 6nF$

$$\frac{1}{C_e} = \frac{1}{C_{12}} + \frac{1}{C_3} \Rightarrow C_e = \frac{C_{12}C_3}{C_{12}+C_3} = \frac{(C_1+C_2)C_3}{C_1+C_2+C_3} = \frac{(4+2)\cdot 3}{4+2+3} = \frac{18}{9}$$

$C_e = 2nF$

Na redno vezanim kondenzatorima moraju biti jednake količine elektriciteta pa C_3 i paralelna veza C_1 i C_2 tj. C_{12} imaju iste količine elektriciteta

$$Q_e = C_e U = \frac{(C_1+C_2)C_3}{C_1+C_2+C_3}U = Q_{12} = Q_3 \Rightarrow$$

$$U_{AB} = \frac{Q_{12}}{C_{12}} = \frac{C_3 U}{C_1+C_2+C_3} \Rightarrow Q_2 = C_2 U_{AB} = \frac{C_2 C_3 U}{C_1+C_2+C_3} = 12nC$$

b) Pre probijanja navedenog kondenzatora napon na kondenzatoru C_3 je

$$U_3 = \frac{Q_3}{C_3} = \frac{(C_1+C_2)}{C_1+C_2+C_3}U$$

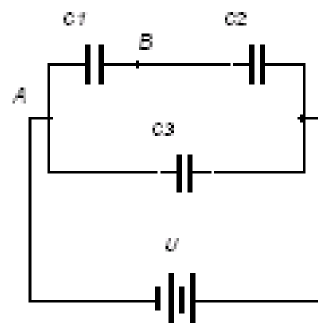
Kada dođe do proboja kondenzatora C_2 ploče kondenzatora C_1 postanu «kratko» vezane: njihovi potencijali se izjednače pa je napon na C_3 jednak U. Prema tome napon se poveća

$$n = \frac{U}{U_3} = \frac{C_1+C_2+C_3}{C_1+C_2} = 1{,}5\ puta$$

1.10 Na slici je prikazana baterija kondenzatora čiji kapaciteti iznose $C_1 = 60nF$, $C_2 = 30nF$ i $C_3 = 10nF$. Ako je količina elektriciteta na kondenzatoru C_3 jednaka $Q_3 = 30nC$ koliki je napon U_{AB}?

REŠENJE:

Na redno vezanim kondenzatorima moraju biti jednake količine elektriciteta pa C_1 i C_2 tj. C_{12} imaju iste količine elektriciteta

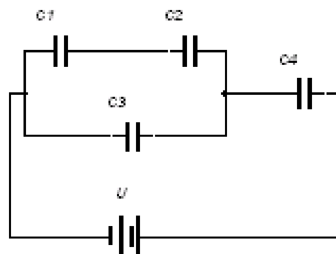


$$Q_{12} = Q_1 = Q_2 = C_{12}U = \frac{C_1 C_2}{C_1+C_2}U$$

$$U = \frac{Q_3}{C_3} \Rightarrow Q_{12} = Q_1 = Q_2 = \frac{C_1 C_2}{C_1+C_2}\cdot\frac{Q_3}{C_3}$$

$$U_{AB} = \frac{Q_1}{C_1} = \frac{C_2 Q_3}{(C_1+C_2)C_3} = 1V$$

1.11 Kondenzatori kapaciteta C_1, C_2, C_3 i C_4 povezani su kao što je prikazano na slici. Koliki treba da bude napon U da bi napon na kondenzatoru C_1 iznosio U_1? Smatrati da je $C_1 = C_3 = C_4 = C$ i $C_2 = C/2$.



REŠENJE:

Potrebno je najpre izračunati ekvivalentnu kapacitivnost kola

$$C_{12} = \frac{C \cdot \frac{C}{2}}{C + \frac{C}{2}} = \frac{C}{3}$$ - jer su $C_1 = C$ i $C_2 = C/2$ vezani redno

$$C_{123} = C_{12} + C_3 = \frac{4}{3}C$$ - C_{12} i C_3 su vezani paralelno

$$C_e = \frac{4}{7}C$$

$$Q_e = Q_4 = Q_{123}$$

Količine elektriciteta na C_e i C_4 su jednake jer su vezani redno

$$U_4 = \frac{Q_4}{C_4} = \frac{4}{7}U \Rightarrow U_{AD} = U - U_4 = \frac{3}{7}U$$

$$Q_{12} = \frac{C_1 C_2}{C_1 + C_2}U_{AD} = \frac{1}{7}CU = Q_1 = C_1 U_1 \Rightarrow U = 7U_1$$

1.12 Ravan vazdušni kondenzator, kapacitivnosti $C_0=100pF$, priključen je na izvor stalnog napona $U=100V$. Kada se kondenzator napunio izvor je isključen, a između elektroda je, do polovine ubačena ploča od dielektrika relativne dielektrične konstante $\varepsilon_r = 4$.

a) Odrediti potencijalnu razliku između elektroda kondenzatora posle ubacivanja dielektrika

b) Izračunati energiju kondenzatora pre i posle ubacivanja dielektrika

REŠENJE:

a)

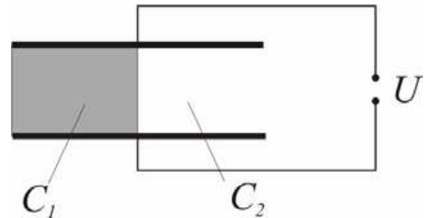
$C_0 = 100pF$

Kapacitet ravnog pločastog kondenzatora se izračunava po obrascu:

$$C_0 = \varepsilon_0 \frac{S}{d}$$

$$Q_0 = C_0 \cdot U$$

Posle isključivanja izvora i uvlačenja dielektrika (prema slici) dobija se paralelna veza dva kondenzatora C_1 i C_2 pa je ekvivalentna kapacitivnost jednaka zbiru pojedinačnih kapacitivnosti.



$$C_1 = \varepsilon_0 \varepsilon_r \frac{S/2}{d} = \frac{\varepsilon_r}{2} C_0$$

$$C_2 = \varepsilon_0 \frac{S/2}{d} = \frac{C_0}{2}$$

$$C_e = C_1 + C_2 = C_0\left(\frac{\varepsilon_r}{2} + \frac{1}{2}\right) = 2.5 \cdot C_0 = 250pF$$

Ukupna količina naelektrisanja kondenzatora je ista pre i posle uvlačenja dielektrika pa je:

$$Q = \text{const}$$

$$Q_0 = C_0 \cdot U = 2.5 \cdot C_0 \cdot U^/$$

$$U^/ = \frac{U}{2.5} = 40V$$

b)

$$W_0 = \frac{1}{2} C_0 \cdot U^2 = 5 \cdot 10^{-7} J$$ - *energija pre ubacivanja dielektrika*

$$W^/ = \frac{1}{2} \cdot 2.5C_0 \cdot \left(U^/\right)^2 = 2 \cdot 10^{-7} J$$ - *energija posle ubacivanja dielektrika*

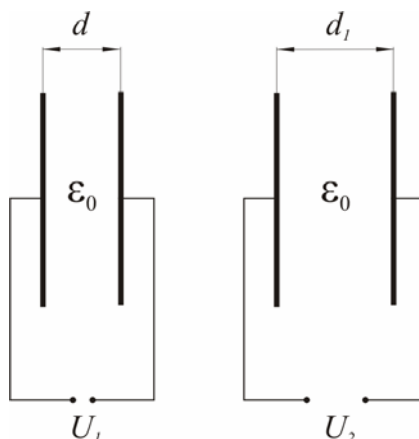
1.13 Ravan vazdušni kondenzator, površine elektroda $S = 40 \times 60cm^2$ i rastojanja između njih $d = 5mm$ priključen je na izvor napona $U = 2kV$. Po izvršenom opterećivanju kondenzator se isključi od izvora i poveća mu se rastojanje između elektroda na $d_1 = 10mm$. Odrediti energiju i jačinu polja u oba slučaja, kao i promenu napona između elektroda kondenzatora do koje dolazi pri povećanju rastojanja.

REŠENJE:

$\varepsilon_0 = 8{,}85 \cdot 10^{-12}\, C^2 / N \cdot m^2$

Kapacitet ravnog vazdušnog kondenzatora se izračunava po obrascu:

$$C_1 = \varepsilon_0 \frac{S}{d} = 4{,}248 \cdot 10^{-7}\, F$$



Energija kondenzatora je:

$$W_1 = \frac{1}{2} C_1 \cdot U^2 = 8{,}496 \cdot 10^{-4}\, J$$

Jačina električnog polja je:

$$E_1 = \frac{U}{d} = 400\, kV/m$$

Količina naelektrisanja kondenzatora je:

$$Q_1 = C_1 \cdot U = 8{,}496 \cdot 10^{-7}\, C$$

Kada se razmaknu ploče dolazi do promene kapacitivnosti kondenzatora, a količina naelektrisanja ostaje nepromenjena jer je izvor isključen. U ovom slučaju dolazi do promene napona između ploča kondenzatora.

$$C_2 = \varepsilon_0 \frac{S}{d_1} = 2{,}12 \cdot 10^{-10}\, F$$

$$Q_1 = Q_2 = C_2 \cdot U_2 \Rightarrow U_2 = \frac{Q_2}{C_2}$$

$$W_2 = \frac{1}{2} C_2 U_2^{\,2} = \frac{1}{2} C_2 \cdot \frac{Q_2^{\,2}}{C_2^{\,2}} = \frac{1}{2} \cdot \frac{Q_2^{\,2}}{C_2}$$

$$W_2 = \frac{1}{2} \cdot \frac{Q_2^{\,2}}{C_2} = 1{,}7 \cdot 10^{-3}\, J$$

$$U_2 = \frac{Q_2}{C_2} = 4000V = 4kV$$

$$E_2 = \frac{U_2}{d_1} = 400\, kV/m$$

$$\Delta U = U_2 - U_1 = 4kV - 2kV = 2kV$$

1.14 Ravan vazušni kondenzator, površine elektroda $S = 70 \times 70 cm^2$ i rastojanja između njih $d = 0.5cm$, priključen je na izvor napona $U = 5kV$. Posle opterećivanja kondenzatora rastojanje između njegovih elektroda se poveća na $d^{/} = 1cm$, ne isključujući pri tome izvor. Izračunati opterećenje kondenzatora i intenzitet električnog polja, kao i energiju pre i posle razmicanja elektroda.

REŠENJE:

U ovom slučaju se menja količina elektriciteta Q jer napon baterije ostaje isti pa je:

$$C_1 = \varepsilon_0 \frac{S}{d} = 8{,}673 \cdot 10^{-10}\,F$$

$$W_1 = \frac{1}{2} C_1 U^2 = 10{,}84mJ$$

$$Q_1 = C_1 \cdot U = 4{,}33 \cdot 10^{-6}\,C$$

$$E_1 = \frac{U}{d} = 1\,{MV}/{m}$$

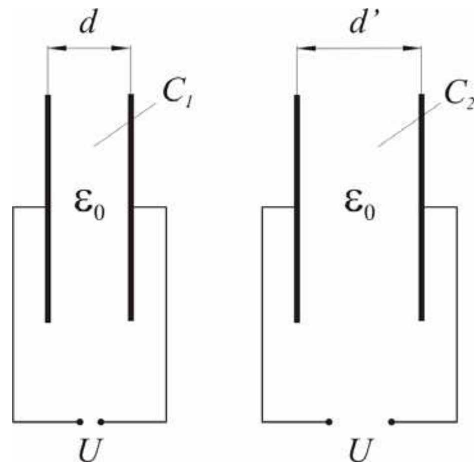
$$U = const$$

$$C_2 = \varepsilon_0 \frac{S}{d'} = 4{,}3364 \cdot 10^{-10}\,F$$

$$W_2 = \frac{1}{2} C_2 U^2 = 5{,}42 \cdot 10^{-3}\,J$$

$$Q_2 = C_2 U = 2.1652 \cdot 10^{-6}\,C$$

$$E_2 = \frac{U}{d'} = 500\,{kV}/{m}$$



1.15 Pločasti kondenzator, čije su elektrode dimenzija $a = 30cm$ i $b = 40cm$, a rastojanje između njih $c = 1cm$, priključen je na napon $U = 1.5kV$. Između elektroda se nalazi staklena ploča dielektrične konstante $\varepsilon_r = 5$, debljine 1cm. Ako se posle odvajanja kondenzatora od izvora izvuče izolaciona ploča od stakla, odrediti promenu energije kondenzatora i privlačnu silu, između elektroda kondenzatora bez dielektrika.

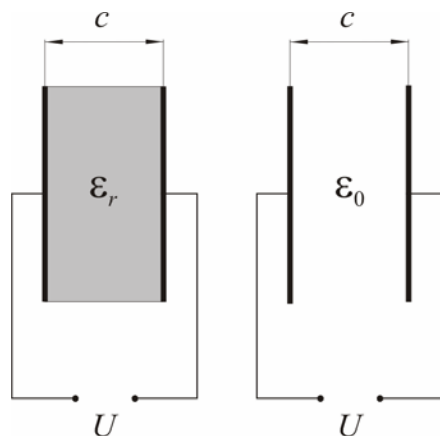
REŠENJE:

$$C_r = \varepsilon_0 \varepsilon_r \frac{ab}{c} = 5{,}31 \cdot 10^{-10}\,F$$

$$W_r = \frac{1}{2} C_r U^2 = 5{,}97 \cdot 10^{-4}\,J$$

Kondenzator se odvoji od izvora i izvuče se dielektrik

$$C_0 = \varepsilon_0 \frac{ab}{c} = 1{,}062 \cdot 10^{-10}\,F$$



$Q = const$

$Q = C_r U = 7{,}965 \cdot 10^{-7} C$

$Q = C_0 U \Rightarrow U = \dfrac{Q}{C_0}$

$W_0 = \dfrac{1}{2} \cdot C_0 U^2 = \dfrac{1}{2} \cdot \dfrac{Q^2}{C_0} = 2{,}987 \cdot 10^{-3} J$

$\Delta W = W_r - W_0 = 2{,}983 \cdot 10^{-3} J$

Privlačna sila između elektroda kondenzatora je:

$\mathrm{W} = \mathrm{F} \cdot \mathrm{d} \Rightarrow \mathrm{F} = \dfrac{\mathrm{W}}{\mathrm{d}}$

$\mathrm{F} = \dfrac{1}{2} \cdot \dfrac{CU^2}{d} = \dfrac{1}{2} \cdot \dfrac{(CU)^2}{Cd} = \dfrac{1}{2} \cdot \dfrac{Q^2}{\varepsilon_0 \dfrac{S}{d} d} = \dfrac{Q^2}{2\varepsilon_0 S}$

$F = \dfrac{Q^2}{2\varepsilon_0 S} \approx 0.299N$

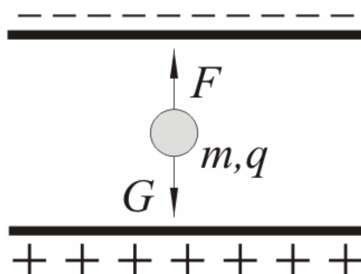
1.16 Naelektrisana čestica mase $m = 0.01g$ nalazi se u ravnoteži u homogenom električnom polju horizontalnog ravnog kondenzatora. Kondenzator je priključen na napon $U = 20kV$, dok je rastojanje između elektroda $d = 5cm$. Odrediti naelektrisanje čestice.

REŠENJE:

Uslov za ravnotežu čestice je:

$F = G$

pri čemu su smerovi sila označeni na slici.



$qE = mg$

$q\dfrac{U}{d} = mg$

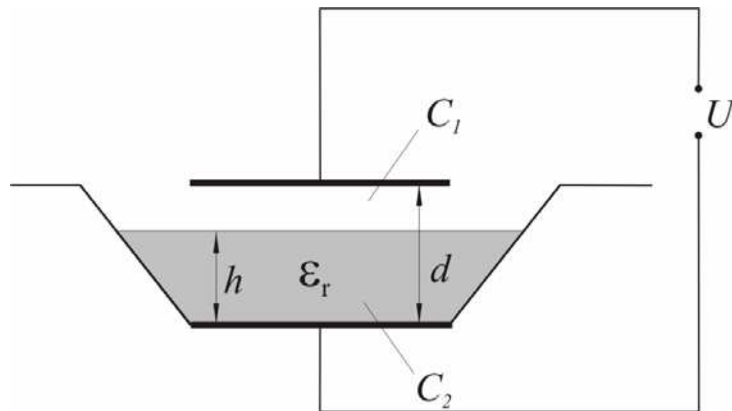
$q = \dfrac{mgd}{U}$

$q = \dfrac{0{,}01 \cdot 10^{-3} \cdot 9{,}81 \cdot 5 \cdot 10^{-2}}{20 \cdot 10^3}$

$q = 2{,}45 \cdot 10^{-10} C = 0{,}245 \cdot 10^{-9} C = 0{,}245nC$

1.17 Ravan vazdušni kondenzator, rastojanja između elektroda $d = 9mm$, smešten je u posudu od izolacionog materijala tako da jedna elektroda leži na dnu posude. Debljina elektroda je zanemarljiva. Kondenzator je priključen na

stalni napon U tako da polje u njemu ima vrednost $E'_0 = 500\,{}^{kV}\!/_{m}$. Do koje visine h treba naliti ulje u posudu da bi polje u vazdušnom delu kondenzatora dostiglo vrednost $E_0 = 1.5\,{}^{MV}\!/_{m}$. Relativna dielektrična konstanta ulja je $\varepsilon_r = 4$.



REŠENJE:

$U = E_0' \cdot d = 4500V$

Sa slike je vidljivo da se radi o rednoj vezi dva kondenzatora gde je:

$$C_1 = \varepsilon_0 \frac{S}{d-h}$$

$$C_2 = \varepsilon_0 \varepsilon_r \frac{S}{h}$$

Ekvivalentna kapacitivnost je:

$$C_e = \frac{C_1 \cdot C_2}{C_1 + C_2} = \frac{\varepsilon_0 \varepsilon_r S}{h + \varepsilon_r (d-h)}$$

Količina naelektrisanja je ista za oba kondenzatora i iznosi:

$$Q = C_e \cdot U$$

Napon na kondenzatoru C_1, koji za dielektrik ima vazduh, je:

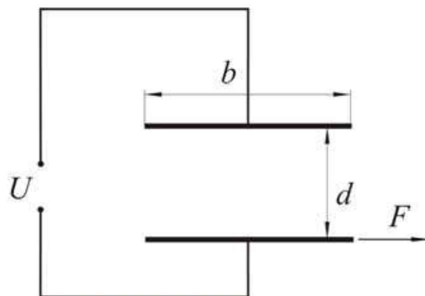
$$U_1 = \frac{Q}{C_1} = \frac{\dfrac{\varepsilon_0 \varepsilon_r S}{h + \varepsilon_r (d-h)} \cdot U}{\dfrac{\varepsilon_0 S}{d-h}} = \frac{\varepsilon_r (d-h) \cdot U}{h + \varepsilon_r (d-h)}$$

Jačina električnog polja koju treba realizovati je data relacijom:

$$E_0 = \frac{U_1}{d-h} = \frac{\varepsilon_r \cdot U}{h + \varepsilon_r (d-h)} = 1{,}5\,{}^{MV}\!/_{m} \Rightarrow h = 8mm$$

1.18 Ravan vazdušni kondenzator, površine elektroda $a \times b$ i razmaka između njih d, priključen je na stalni napon U. Odrediti potrebnu silu da bi se izvršilo pomeranje jedne od elektroda u pravcu i smeru kao na slici. Zanemariti efekat krajeva. $U = 500V,\ a = 1m,\ b = 0.5m,\ d = 2.5mm$.

REŠENJE:



$$W_1 = \frac{1}{2}C_1U^2 = \frac{1}{2}U^2\varepsilon_0\frac{ab}{c}$$

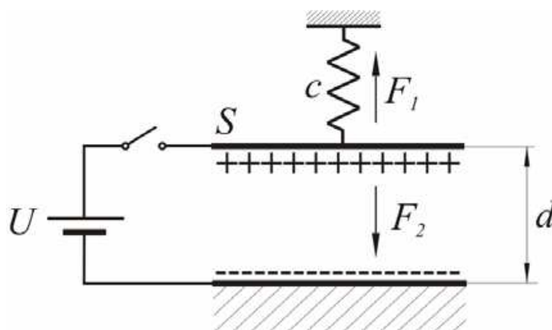
$$W_2 = \frac{1}{2}C_2U^2 = \frac{1}{2}U^2\varepsilon_0\frac{a(b-\Delta x)}{d}$$

$$\Delta W = W_1 - W_2 = \frac{1}{2}U^2\varepsilon_0\frac{a}{d}[b - b + \Delta x]$$

$$F = \frac{\Delta W}{\Delta x} = \frac{1}{2}U^2\varepsilon_0\frac{a}{d} = 4{,}425 \cdot 10^{-4}\,N$$

1.19 Jedna elektroda ravnog vazdušnog kondenzatora površine $S = 100cm^2$ je učvršćena, dok je druga okačena o oprugu konstante $c = 11.275\,N/m$. Kada je kondenzator neopterećen, rastojanje između njegovih elektroda je $d = 2mm$. Kada se kondenzator priključi na izvor napona U, opruga će se istegnuti za $x = 0{,}3mm$. Odrediti napon izvora U. Efekat krajeva zanemariti.

REŠENJE:
Sila opruge je F_1, a privlačna sila između obloga kondenzatora je F_2. Ove sile moraju biti u ravnoteži pa je:



$$F_1 = cx$$

$$F_2 = \frac{Q^2}{2\varepsilon_0 S}$$

$$F_1 = F_2$$

$$Q = CU$$

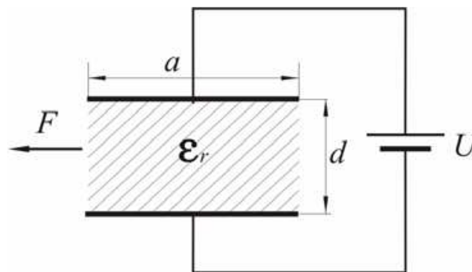
$$C = \varepsilon_0\frac{S}{d-x}$$

$$cx = \frac{C^2U^2}{2\varepsilon_0 S} = U^2\frac{\left(\frac{\varepsilon_0 S}{d-x}\right)^2}{2\varepsilon_0 S} = U^2\frac{\varepsilon_0 S}{2(d-x)^2}$$

$$U^2 = \frac{2(d-x)^2 \cdot cx}{\varepsilon_0 S}$$

$$U = \sqrt{\frac{2cx(d-x)^2}{\varepsilon_0 S}} = 470V$$

1.20 Ravan kondenzator sa čvrstim dielektrikom relativne dielektrične konstante ε_r, priključen je na stalni napon U. Dimenzije elektroda su $a \times b$, a rastojanje između njih d. Odrediti silu potrebnu za izvlačenje dielektrika u pravcu i smeru kao na slici.



REŠENJE:

$U = 100V, a = b = 20cm, d = 2mm, \varepsilon_r = 5$.

$$C_r = \varepsilon_0 \varepsilon_r \frac{S}{d} = \varepsilon_0 \varepsilon_r \frac{ab}{d}$$

Energija kondenzatora pre izvlačenja dielektrika je :

$$W_r = \frac{1}{2} C_r U^2$$

Kada se dielektrik izvuče za Δx dobija se paralelna veza dva kondenzatora C_1 i C_2 pa je ekvivalnetna kapacitivnost data relacijom:

$$C_1 = \varepsilon_0 \frac{b\Delta x}{d}$$

$$C_2 = \varepsilon_0 \varepsilon_r \frac{b(a-\Delta x)}{d}$$

$$C_e = C_1 + C_2 = \varepsilon_0 \frac{b}{d}\left[\Delta x + \varepsilon_r (a - \Delta x)\right]$$

Energija ekvivalentnog kondenzatora je:

$$W_e = \frac{1}{2} C_e U^2$$

Razlika energija je:

$$\Delta W = \frac{1}{2}U^2\left[C_r - C_e\right] = \frac{1}{2}U^2\,\frac{\varepsilon_0 \cdot b}{d}\left[\varepsilon_r a - \varepsilon_r a - \Delta x + \varepsilon_r \Delta x\right]$$

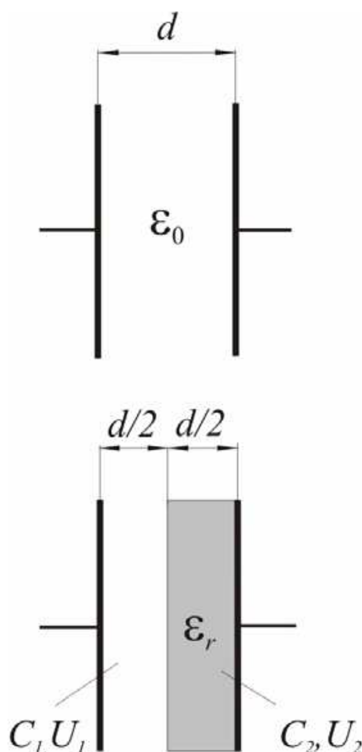
$$\Delta W = \frac{1}{2}\cdot\frac{\varepsilon_0 b U^2}{d}\,\Delta x(\varepsilon_r - 1)$$

Sila potrebna za izvlačenje dielektrika se izračunava:

$$F = \frac{\Delta W}{\Delta x} = \frac{1}{2}\varepsilon_0 b U^2\,\frac{(\varepsilon_r - 1)}{d} = 0{,}5\cdot\frac{8{,}85\cdot 10^{-12}\cdot 20\cdot 10^{-2}\cdot 100^2\cdot 4}{2\cdot 10^{-3}} = 1{,}77\cdot 10^{-5}\,N$$

1.21 Ravan vazdušni kondenzator ima rastojanje između elektroda d i priključen je na stalni napon U. Ako se u međuelektrodni prostor kondenzatora ubaci pločica od izolacionog materijala, relativne dielektrične konstante ε_r i debljine $d/2$, jačina polja u vazdušnom delu kondenzatora će se povećati za 50% u odnosu na prvobitnu. Odrediti ε_r.

REŠENJE:



$$C_0 = \varepsilon_0\frac{S}{d}$$

$$E = \frac{U}{d}$$

$$C_1 = \varepsilon_0\frac{S}{\frac{d}{2}} = 2C_0$$

$$C_2 = \varepsilon_r\varepsilon_0\frac{S}{\frac{d}{2}} = 2\varepsilon_r C_0$$

$$C_e = \frac{C_1 C_2}{C_1 + C_2} = \frac{2\varepsilon_r}{1+\varepsilon_r}C_0$$

$$Q = C_e\cdot U$$

$$U = U_1 + U_2$$

$$U_1 = \frac{Q}{C_1} = \frac{C_e U}{C_1} = \frac{2\varepsilon_r C_0}{(1+\varepsilon_r)\cdot 2C_0}\cdot U = \frac{\varepsilon_r}{1+\varepsilon_r}U$$

$$E_1 = 1{,}5E$$

$$\frac{U_1}{\frac{d}{2}} = 1{,}5\frac{U}{d} \Rightarrow \frac{2\varepsilon_r}{1+\varepsilon_r} = 1{,}5$$

$$2\varepsilon_r = 1{,}5(1+\varepsilon_r) = 1{,}5 + 1{,}5\varepsilon_r$$

$$0{,}5\varepsilon_r = 1{,}5 \;\Rightarrow\; \varepsilon_r = 3$$

1.22 Ravan vazdušni kondenzator, rastojanja između elektroda $d = 9mm$, priključen je na stalni napon U. Polje u kondenzatoru ima vrednost $E = 0.5\,{}^{MV}\!/\!_{m}$. U prostor između elektroda kondenzatora ubaci se pločica debljine $d_1 = 8mm$ od materijala relativne dielektrične konstante $\varepsilon_r = 4$. Odrediti električno polje u obe sredine.

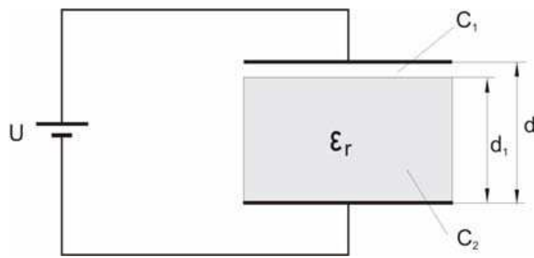
REŠENJE:

$$U = E \cdot d = 0.5 \cdot 10^6 \cdot 9 \cdot 10^{-3} = 4500V$$

$$C_0 = \varepsilon_0 \frac{S}{d} \text{ - vazdušni kondenzator}$$

$$C_1 = \varepsilon_0 \frac{S}{\frac{d}{9}} = 9\frac{\varepsilon_0 \cdot S}{d} = 9 \cdot C_0$$

$$C_2 = \varepsilon_0 \varepsilon_r \frac{S}{\frac{8}{9}d} = \frac{9}{8}\varepsilon_r \cdot C_0$$



$$C_{ekv} = \frac{C_1 \cdot C_2}{C_1 + C_2} = \frac{9\varepsilon_r}{8 + \varepsilon_r} \cdot C_0$$

$$Q = C_{ekv} \cdot U = C_1 \cdot U_1 = C_2 \cdot U_2$$

$$U_1 = \frac{Q}{C_1} = 1500V$$

$$U_2 = \frac{Q}{C_2} = 3000V$$

$$E_1 = \frac{U_1}{1mm} = 1.5\,{}^{MV}\!/\!_{m}$$

$$E_2 = \frac{Q}{C_2} = 375\,{}^{kV}\!/\!_{m}$$

2. JAČINA I GUSTINA ELEKTRIČNE STRUJE. ELEKTRIČNI OTPOR PROVODNIKA

Električna struja predstavlja usmereno kretanje naelektrisanih čestica
Trenutna jačina električne struje definisana je izrazom:

$$i = \frac{dq}{dt}$$

gde je dq količina elektriciteta koja „protekne„ kroz poprečni presek provodnika u beskonačno kratkom vremenskom intervalu dt .
Srednja vrednost jačine električne struje u dužem vremenskom intervalu Δt je:

$$\bar{I} = \frac{\Delta q}{\Delta t}$$

Jedinica za jačinu električne struje je amper:

$$1A = \frac{1C}{1s} = 1\frac{C}{s}$$

Gustina električne struje brojno je jednaka količniku jačine električne struje i poprečnog preseka jedinične površine provodnika:

$$j = \frac{I}{S} = ne\vec{v}$$

gde je I jačina struje koja protiče kroz poprečni presek provodnika površine *S*, n koncentracija slobodnih elektrona (broj slobodnih elektrona u jedinici zapremine), e apsolutna vrednost količine elektriciteta elektrona, a $\vec{v}$ srednja brzina usmerenog kretanja elektrona.
Otpor homogenog provodnika dužine l i površine poprečnog preseka S je.

$$R = \rho\frac{l}{S} = \frac{1}{\sigma}\cdot\frac{l}{S}$$

gde je ρ specifičan otpor provodnika, a σ specifična provodnost provodnika.
Jedinice za otpor i specifični otpor su om i ommetar respektivno:

$$[R] = 1\Omega, [\rho] = 1\Omega\cdot m$$

Provodnost provodnika jednaka je recipročnoj vrednosti otpora tog provodnika. Jedinica za provodnost je simens, a za specifičnu provodnost simens po metru. Dakle:

$$G = \frac{1}{R}, [G] = \frac{1}{\Omega} = 1S, [\sigma] = \frac{1}{\Omega\cdot m} = 1\frac{S}{m}$$

Otpor provodnika menja se sa temperaturom po formuli:

$$R = R_0(1 + \alpha t)$$

gde je R otpor na 0^0C, a α temperaturni koeficijent otpora.

Ekvivalentna otpornost redne veze otpornika

$$R_e = \sum_{i=1}^{n} R_i = R_1 + R_2 + ... + R_n$$

Ekvivalenta otpornost paralelne veze otpornika

$$\frac{1}{R_e} = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{R_i} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + ... + \frac{1}{R_n}$$

Omov zakon *– Jačina struje kroz provodnik upravo je proporcionalna naponu na krajevima provodnika, a obrnuto proporcionalna njegovoj otpornosti. Omov zakon se može napisati u jednom od sledećih oblika:*

$$I = \frac{U}{R} \quad U = IR \quad R = \frac{U}{I}$$

Prvi Kirhofov zakon *– algebarski zbir jačina struja u provodnicima koji se sustiču u jednom čvoru električne mreže jednak je nuli:* $\sum_{k=1}^{n} I_k = 0$

Drugi Kirhofov zakon *– U bilo kojoj zatvorenoj konturi električnog kola (zatvorena putanja formirana od grana kola) koja sadrži proizvoljan broj elektromotornih sila i otpornika, kora biti zadovoljen drugi Kirhofov zakon koji se iskazuje sledćom relacijom:*

$$\sum E - \sum RI = 0 \quad ili \quad \sum E = \sum RI$$

pri čemu elektromotorne sile treba uzimati sa pozitivnim predznakom ako je njihov smer saglasan sa proizvoljno odabranim smerom obilaska po konturi i obrnuto. Naponi na otpornicima se uzimaju sa pozitivnim predznakom ako je referentni smer struje kroz otpornik saglasan sa smerom obilaska po konturi i obrnuto.

Električni rad *– Prilikom pomeranja naelektrisanja Q u elektrostatičkom polju od tačke A, koja se nalazi na potencijalu* φ_A*, do tačke B, koja se nalazi na potencijalu* φ_B *sile polja izvrše rad koji je jednak:*

$$A = Q(\varphi_A - \varphi_B) = QU_{AB}$$

Ako se na osnovu ovog izraza dobije pozitivna vrednost to znači da su sile polja izvršile rad. Kada se rad vrši protivu sila polja za A se dobija negativna vrednost.

Snaga P *kojom se rad sila stacionarnog električnog polja transformiše u toplotnu energiju na nekom otporniku, proporcionalna je otpornosti otpornika R i kvadratu struje I kroz otpornik (Džulov zakon):*

$$P = RI^2 = UI = \frac{U^2}{R}$$

Teorija superpozicije *– Jačina struje u bilo kojoj grani složenog linearnog električnog kola, nastala kao posledica jednovremenog dejstva svih generatora u kolu, jednaka je algebarskom zbiru jačina struja koje bi u toj grani tekla pod*

dejstvom pojedinih generatora kada su svi ostali generatori zamenjeni svojim unutrašnjim otpornostima.
Tevenenova teorema *– Svako linearni aktivni dvopol sa nepromenljivim otpornicima i generatorima može se zameniti realnim naponskim generatorom čija je elektromotorna sila jednaka naponu praznog hoda dvopola, a unutrašnja otpornost ekvivalentna otpornosti dvopola.*

2.1 Električna struja teče između «ploča» kondenzatora (površine Zemlje i sloja na visini 50-ak kilometara) «prenoseći» svakog godine količinu elektriciteta od približno 0.15GC. Izračunaj srednju jačinu električne struje.

REŠENJE:
Srednja jačina električne struje je protekla količina elektriciteta za dato vreme, pa je:

$$I = \frac{q}{t} = \frac{0.15 \cdot 10^9 C}{365 \cdot 24 \cdot 60 \cdot 60 s} = 1{,}7 kA$$

2.2 Kolika količina elektriciteta će da protekne kroz poprečni presek provodnika u toku jednog minuta, ako kroz provodnik protiče električna struja jačine 10mA?

REŠENJE:

$$q = It = 10 \cdot 10^{-3} A \cdot 60 s = 0{,}6 C$$

2.3 Ako pri „udaru" groma kroz vazduh protekne količina elektriciteta 20C, pri srednjoj jačini električne struje od 20kA, koliko vremena traje protok elektriciteta?
REŠENJE:

$$t = \frac{q}{I} = \frac{20C}{20 \cdot 10^3 A} = 10^{-3} s = 1 ms$$

2.4 Kroz vlakno sijalice prečnika 19µm protiče struja jačine 125mA. Kolika je gustina struje u vlaknu?
REŠENJE:

$$j = \frac{I}{S} = \frac{4I}{d^2 \pi} = \frac{4 \cdot 125 \cdot 10^{-3} A}{\left(19 \cdot 10^{-6} m\right)^2 \pi} = 4{,}41 \cdot 10^8 \frac{A}{m^2} = 441 \frac{A}{mm^2}$$

2.5 Iz kosmosa prema Zemlji kreći se protoni čija je prosečna brzina oko $v = 470 km/s$. Njihova koncentracija je $n = 8.7 cm^{-3}$. Kada ih Zemljino magnetno polje, iznad atmosfere, ne bi skretalo i rasejavalo, kolika bi bila

gustina električne struje tih protona koja bi uvirala u atmosferu? Kolika bi bila ukupna jačina te struje? Poluprečnik Zemlje je $R = 6370km$.

REŠENJE:

$$j = ne\upsilon = 8.7 \cdot 10^6 \cdot m^{-3} \cdot 1.6 \cdot 10^{-19} C \cdot 470 \cdot 10^3 \frac{m}{s} = 6.5 \cdot 10^{-7} \frac{A}{m^2}$$

$$I = ne\upsilon \cdot 4R^2\pi = 4\pi jR^2 = 33.3GA$$

2.6 Metalni provodnici mogu da izdrže protok električne struje čija je gustina oko $j_{max} = 10\, A/mm^2$. Ako je koncentracija slobodnih elektrona $n = 10^{29} m^{-3}$ proceni srednju brzinu usmerenog kretanja elektrona.

REŠENJE:

$$j_{max} = ne\upsilon \Rightarrow \upsilon = \frac{j_{max}}{ne} = \frac{10 \cdot 10^6 \frac{A}{m^2}}{10^{29} \cdot m^{-3} \cdot 1.6 \cdot 10^{-19} C} = 0.6 \frac{mm}{s}$$

2.7 Snop elektrona „daje“ električnu struju gustine $j = 10\, A/mm^2$. Ako je brzina elektrona $v = 10^6\, m/s$. Kolika je zapreminska gustina elektriciteta?

REŠENJE:

Zapreminska gustina ρ je jednaka $\rho = ne$ pa je:

$$j = ne\upsilon = \rho\upsilon \Rightarrow \rho = \frac{j}{\upsilon} = 10 \frac{C}{m^3}$$

2.8 Ako nervno vlakno zamislimo kao cilindar poluprečnika $r = 5\mu m$ i dužine $l = 1cm$ koliki je električni otpor tog vlakna? Specifični otpor supstance vlakna (aksoplazme) je $\rho = 2\Omega m$.

REŠENJE:

$$R = \rho \frac{l}{S} = \rho \frac{l}{r^2\pi} = 2\Omega m \frac{10^{-2} m}{\left(5 \cdot 10^{-6} m\right)^2 \pi} = 255M\Omega$$

2.9 Od nikelinske trake širine $a = 1cm$ i debljine $d = 0,4mm$ treba napraviti otpornik čiji je otpor $R = 1\Omega$. Kolika je potrebna dužina trake? Specifični otpor nikelina je $\rho = 4 \cdot 10^{-7} \Omega m$.

REŠENJE:

$$R = \rho \frac{l}{S} = \rho \frac{l}{ad} \Rightarrow l = \frac{adR}{\rho} = 10m$$

2.10 Volframsko vlakno sijalice ima prečnik $d = 0{,}02mm$. Ako je specifični otpor zagrejanog vlakna $\rho = 7{,}4 \cdot 10^{-7}\,\Omega m$, a ukupni otpor zagrejanog vlakna $R = 330\Omega$, kolika je dužina vlakna?
REŠENJE:

$$l = \frac{Rd^2\pi}{4\rho} = 14cm$$

2.11 Pretpostavimo da je radna temperatura sijalice $t = 2000^0C$. Ako je otpor vlakna sijalice na 0^0C jednak $R_0 = 24\Omega$, proceni otpor na radnoj temperaturi. Termički koeficijenti otpora za volfram iznose približno $\alpha = 5{,}24 \cdot 10^{-3}\left({}^0C\right)^{-1}, \beta = 0{,}7 \cdot 10^{-6}\left({}^0C\right)^{-1}, \gamma = 0.062 \cdot 10^{-9}\left({}^0C\right)^{-3}$. Koliko puta je otpor na radnoj temperaturi veći od otpora na 0^0C?

REŠENJE:

Ako za zavisnost otpora od temperature koristimo približnu formulu dobija se.

$$R = R_0\left(1 + \alpha\Delta t\right) = 275{,}5\Omega$$

Prethodna formula važi samo za male temperaturne promene. Za veće temperaturne promene koristi se relacija:

$$R = R_0\left(1 + \alpha\Delta t + \beta\Delta t^2 + \gamma\Delta t^3\right)$$

Kada se zamene zadate vrednosti dobija se $R = 355\Omega$. Ovaj otpor je približno 15 puta veći od otpora na 0^0C.

2.12 Specifični otpor aluminijuma na 0^0C iznosi $\rho_0 = 2{,}4 \cdot 10^{-8}\,\Omega m$, dok na temperaturi $t = 20^0C$ iznosi $\rho = 2{,}6 \cdot 10^{-8}\,\Omega m$. Koliki je temperaturni koeficijent otpora?

REŠENJE:

$$\rho = \rho_0\left(1 + \alpha t\right) \Rightarrow \alpha = \frac{\rho - \rho_0}{\rho_0 t} = 0{,}004\left({}^0C\right)^{-1}$$

2.13 Na kojoj temperaturi otpor žice od nihroma iznosi $R = 48\Omega$, ako je njen otpor na temperaturi 0^0C $R_0 = 36\Omega$? Temperaturni koeficijent otpora nihroma je $\alpha = 4 \cdot 10^{-4}\left({}^0C\right)^{-1}$.

REŠENJE:

$$R = R_0\left(1 + \alpha t\right) \Rightarrow t = \frac{R - R_0}{\alpha R_0} = 833^0C$$

2.14 Poprečni presek provodnika je krug čiji je prečnik $d = 0{,}8mm$. Za koje vreme će kroz provodnik da protekne količina elektriciteta $q = 1C$ ako kroz provodnik protiče struja konstantne gustine $j = 0{,}1\dfrac{A}{mm^2}$?

REŠENJE:

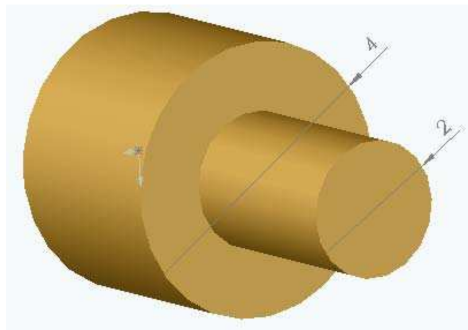
$$j = \frac{I}{S} = \frac{4I}{d^2\pi} = \frac{4q}{d^2\pi t} \Rightarrow t = \frac{4q}{jd^2\pi} = 19{,}9s$$

2.15 Kroz provodnik protiče električna struja jačine $I = 10A$. Kolika je u eV kinetička energija usmerenog kretanja? Površina poprečnog preseka provodnika je $S = 1mm^2$, a koncentracija slobodnih elektrona $n = 2{,}5 \cdot 10^{22} cm^{-3}$.

REŠENJE:

$$E_k = \frac{1}{2}m\upsilon^2 = \frac{1}{2}m\left(\frac{I}{neS}\right)^2 = 1{,}8 \cdot 10^{-17} eV$$

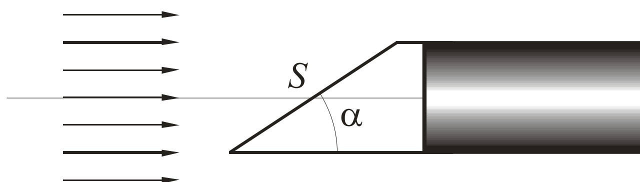
2.16 Provodnik kroz koji protiče struja sastoji se iz dva dela valjkastog oblika kao na slici. Prečnik preseka debljeg valjka iznosi $d_1 = 4mm$, a užeg $d_2 = 2mm$. Ako u širem delu protiče električna struja gustine $j_1 = 2\dfrac{A}{mm^2}$, kolika je gustina u užem delu?



REŠENJE:
Jačina struje u oba poprečna preseka je ista, ali se gustine struja menjaju pa je:

$$I = j_1 S_1 = j_2 S_2 \Rightarrow j_2 = j_1\frac{S_1}{S_2} = j_1\left(\frac{d_1}{d_2}\right)^2 = 8\frac{A}{mm^2} = 8\frac{MA}{m^2}$$

2.17 U rentgenskoj cevi širi snop elektrona obrazuje struju gustine $j = 0{,}2\dfrac{A}{mm^2}$. Elektroni padaju na površinu štapa koja je „zasečena „ u obliku klina pod uglom $\alpha = 30^0$ (vidi sliku).Štap je postavljen u pravcu ose snopa. Ako je površina $S = 100mm^2$ kolika je jačina električne struje?



REŠENJE:

Površina poprečnog preseka štapa iznosi:

$$S_n = S\,sin\,\alpha$$

pa je jačina struje: $I = jS_n = jS\,sin\,\alpha = 10A$

2.18 Specifični otpor provodnika na temperaturi $t_1 = 15^0C$ iznosi $\rho_1 = 1{,}4\cdot 10^{-8}\,\Omega m$. Koliki je specifični otpor tog provodnika na $t_2 = 30^0C$ ako je toplotni koeficijent otpora $\alpha = 4\cdot 10^{-3}\left({}^0C\right)^{-1}$?

REŠENJE:

$$\rho_2 = \rho_1(1+\alpha\Delta t) = \rho_1\left[1+\alpha(t_2 - t_1)\right]$$
$$\rho_2 = 1{,}4\cdot 10^{-8}\left[1+4\cdot 10^{-3}(30-15)\right] = 1{,}48\cdot 10^{-8}\,\Omega m$$

2.19 Jačina električne struje se menja u toku vremena po zakonu $I = at^2$ gde je $a = 3\frac{A}{s^2}$. Kolika količina elektriciteta prođe kroz poprečni presek provodnika u toku vremena $t_1 = 3s$?

REŠENJE:

$$q = \int_0^{t_1} Idt = a\int_0^3 t^2dt = a\frac{t_1^{\,3}}{3} - 0 = 3\frac{A}{s^2}\cdot\frac{3^3}{3} = 27C$$

2.20 Otpornost jednog metalnog provodnika na temperaturi $t_1 = 10^0C$ ima vrednost $R_1 = 20{,}8\Omega$, a na temperaturi $t_2 = 80^0C$ je $R_2 = 26{,}4\Omega$. Izračunati temperaturni koeficijent otpora α provodnika. Kolika je otpornost R_0 tog provodnika na 0^0C?

REŠENJE:

$$\begin{matrix} R_1 = R_0(1+\alpha t_1) \\ R_2 = R_0(1+\alpha t_2) \end{matrix} \Rightarrow \frac{R_1}{R_2} = \frac{R_0(1+\alpha t_1)}{R_0(1+\alpha t_2)} \Rightarrow \alpha = \frac{R_2 - R_1}{R_1 t_2 - R_2 t_1} = 0{,}004^0C^{-1}$$

$$R_0 = \frac{R_1}{1+\alpha t_1} \Rightarrow R_0 = 20\Omega$$

2.21 Čajnik ima dva grejača. Pri uključivanju jednog grejača čaj provri za $t_1 = 4\,min$,a pri uključivanju samo drugog grejača za $t_2 = 12\,min$. Za koje će vreme ista količina čaja da provri kada su uključena oba grejača i to:

a) redno
b) paralelno

Smatrati da u oba slučaja ukupna količina toplote ide samo na zagrevanje čaja.

REŠENJE:

$$\frac{U^2}{R_1}t_1 = \frac{U^2}{R_2}t_1$$

$$R_1 t_2 = R_2 t_1$$

$$12R_1 = 4R_2$$

$$R_2 = 3R_1$$

a) $$\frac{U^2}{R_1}t_1 = \frac{U^2}{R_1+R_2}t_3$$

$$t_3 = 16\,min$$

b) $$\frac{U^2}{R_1}t_1 = \frac{U^2(R_1+R_2)}{R_1R_2}t_4$$

$$t_4 = 3\,min$$

2.22 Metalna spirala otpornosti $R = 40\Omega$ napravljena je od žice prečnika $2r = 0{,}6mm$. Spirala je priljučena na izvor napona U tako da gustina struje iznosi $j = 320\frac{A}{cm^2}$. Odrediti vrednost napona U i snage spirale P.

REŠENJE:

$$j = \frac{I}{S} \Rightarrow I = jS = j \cdot r^2\pi = 320\frac{A}{cm^2}\cdot\left(0{,}3\cdot 10^{-1}\,cm\right)^2\pi$$

$$U = RI = RjS = 40\cdot 320\cdot 0{,}2827433\cdot 10^{-2} = 36{,}19V$$

$$P = \frac{U^2}{R} = 32{,}74W$$

2.23 Rešo je priključen na izvor napona $U = 110V$. Za vreme $t = 15\,min$ na rešou se zagreje $0{,}6\,l$ vode od $t_1 = 20^0C$ do $t_2 = 100^0C$. Kolika je otpornost

rešoa ako je koeficijent korisnog dejstva $\eta = 40\%$?. Specifična toplota vode je $c = 4186 \frac{J}{kg^0C}$.

REŠENJE:

$Q = mc\Delta t = mc(t_2 - t_1)$ - količina toplotne energije koja je potrebna za zagrevanje vode

$$m = \rho \cdot V$$
$$\rho = 1000 \frac{kg}{m^3} \Rightarrow m = 1000 \frac{kg}{m^3} \cdot 0{,}6 \cdot 10^{-3} m^3 = 0{,}6 kg$$

$$mc\Delta t = \eta \frac{U^2 t}{R} \Rightarrow R = \frac{\eta U^2 t}{mc\Delta t} = 21{,}68\Omega$$

2.24 Kolika količina elektriciteta q treba da prođe kroz električni grejač čija je otpornost $R = 20\Omega$ da bi se grejačem zagrejalo $100l$ vode za $\Delta t = 50^0C$ u toku $t = 30 min$.

REŠENJE:

$$Q = mc\Delta t = I^2 Rt \Rightarrow I = \sqrt{\frac{mc\Delta t}{Rt}} = 24{,}11A$$
$$Q = It = 24{,}11 \cdot 30 \cdot 60 = 4{,}34 \cdot 10^4 C$$

2.25 Zlatna žica duga $l_1 = 5m$, a srebrna $l_2 = 8m$. Koliki će da bude ekvivalentni otpor, ako ove provodnike vežemo:

a) redno
b) paralelno?

Specifične provodnosti zlata i srebra su $\sigma_1 = 50 \frac{MS}{m}$ i $\sigma_2 = 67 \frac{MS}{m}$ respektivno. Oba provodnika imaju jednake površine poprečnog preseka $S = 0{,}4mm^2$.

REŠENJE:

a)
$$R_e = R_1 + R_2 = \frac{1}{\sigma_1} \cdot \frac{l_1}{S} + \frac{1}{\sigma_2} \cdot \frac{l_2}{S} = \frac{1}{50 \cdot 10^6} \cdot \frac{5}{0{,}4 \cdot 10^{-6}} + \frac{1}{67 \cdot 10^6} \cdot \frac{8}{0{,}4 \cdot 10^{-6}} = 0{,}55\Omega$$

b)

$$R_e = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} = \frac{l_1 l_2}{S(l_1\sigma_2 + l_2\sigma_1)} = 0{,}14\Omega$$

2.26 Šta biva sa jačinom struje u provodniku, ako se napon na njegovim krajevima :

a) poveća dva puta
b) smanji dva puta

REŠENJE:

a) Na osnovu Omovog zakona može se zaključiti da se jačina struje kroz provodnik poveć dva puta
b) Na osnovu Omovog zakona može se zaključiti da se jačina struje kroz provodnik smanjuje dva puta

2.27 Ako kroz provodnik priključen na konstantni napon $U = 12V$ u toku 1h kroz provodnik protekne količine elektriciteta $q = 80kC$ odrediti otpor tog provodnika.

REŠENJE:

$$R = \frac{U}{I} = \frac{Ut}{q} = \frac{12 \cdot 3600}{80 \cdot 10^3} = 0{,}54\Omega$$

2.28 Na zemlji ispod 400 kilovoltnog dalekovoda, jačina električnog polja dostiže vrednost i do $E = 5\frac{kV}{m}$. Proceni kolika je jačina struje koja može da protekne kroz telo čoveka visine $h = 2m$, ako je otpor tela (sa otporom kontakta sa zemljom) jednak $R = 1M\Omega$?

REŠENJE:

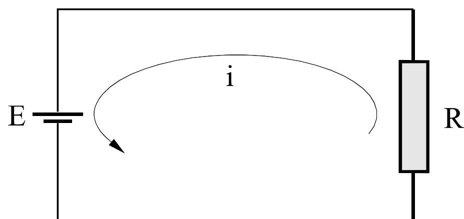
Između glave i stopala čoveka vlada napon :

$$U = Eh = 10kV$$

pa je jačina struje koja protiče kroz telo:

$$I = \frac{U}{R} = \frac{Eh}{R} = 10mA$$

2.29 Izvor ima elektromotornu silu $E = 6V$ i unutrašnji otpor $r = 1\Omega$. Kolika će da bude jačina struje koja će proticati kroz kolo, ako na taj izvor priključimo potrošač otpora $R = 5\Omega$?
REŠENJE:



$$I = \frac{E}{R + r} = 1A$$

2.30 Baterija sa tranzistorski radioprijemnik ima elektromotornu silu $E = 9V$. Ako polove te baterije spojimo kratkom bakarnom žicom čiji otpor možemo zanemariti (tzv. kratki spoj) onda kroz tu žicu teče struja jačine $I_0 = 4A$. Koliki je unutrašnji otpor te baterije?

REŠENJE:

$$E = (R + r)I \Rightarrow I = \frac{E}{R + r} \Rightarrow I_0 = \frac{E}{r} \Rightarrow r = \frac{E}{I_0} = 2{,}25\Omega$$

2.31 Provodnik dužine l, čiji je poluprečnik poprečnog preseka r, priključen je na napon U. Kako se menja jačina struje u tom provodniku kada povećamo n puta:

a) napon
b) dužinu provodnika
c) poluprečnik poprečnog preseka?

REŠENJE:
Na osnovu Omovog zakona.

$$I = \frac{U}{R} = \frac{US}{\rho l} = \frac{Ur^2\pi}{\rho l}$$

sledi:

a) kada se napon poveća n puta toliko puta se poveća i jačina struje
b) kada se dužina provodnika poveća n puta jačina struje se smanji n puta
c) ako se poluprečnik poprečnog preseka poveća n puta jačina struje se poveća n^2

2.32 Bakarni provodnik dužine $l = 1m$ priključen je na izvor napona $U = 6V$. Koliko vremena je potrebno da slobodni elektron pređe put od jednog do drugog kraja provodnika? Koncentracija slobodnih elektrona u bakru je $n = 8{,}4 \cdot 10^{22} cm^{-3}$, a specifični otpor $\rho = 17 n\Omega \cdot m$.

REŠENJE:

$$I = neS\upsilon$$

$$I = \frac{U}{R} = \frac{US}{\rho l}$$

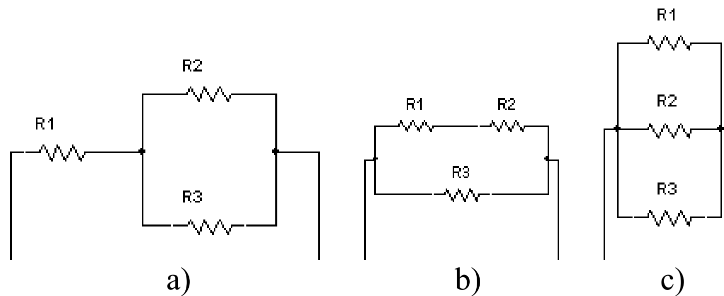
$$t = \frac{I}{\upsilon} = \frac{\rho l^2 ne}{U} = 38s$$

2.33 Napon na krajevima provodnika menja se linearno od vrednosti $U_1 = 10V$ do vrednosti $U_2 = 20V$. Kolika količina elektriciteta protekne kroz provodnik za vreme $\Delta t = 1min$, ako je otpor provodnika $R = 10\Omega$?

REŠENJE:

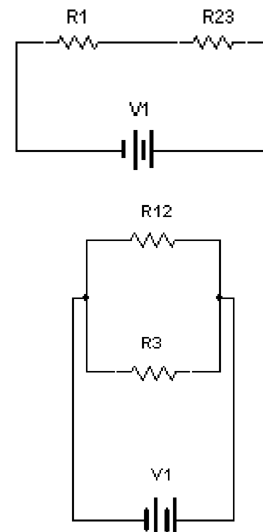
$$\Delta q = \frac{I_1 + I_2}{2}\Delta t = \frac{U_1 + U_2}{2R}\Delta t = 90C$$

2.34 Otpori $R_1 = 2\Omega$, $R_2 = 6\Omega$ i $R_3 = 3\Omega$ vezani su kako je to prikazano na slici. Nađi ekvivalentne otpore u ovim slučajevima.



REŠENJE:

a) Kada paralelno vezane otpore R_2 i R_3 zamenimo njihovim ekvivalentnim otporom R_{23} dobićemo vezu prikazanu na crtežu. Prema tome je:



$$R_e = R_1 + R_{23} = R_1 + \frac{R_2 R_3}{R_2 + R_3} = 4\Omega$$

b)

$$R_e = \frac{R_{12} R_3}{R_{12} + R_3} = \frac{(R_1 + R_2)R_3}{R_1 + R_2 + R_3} = 218\Omega$$

c)

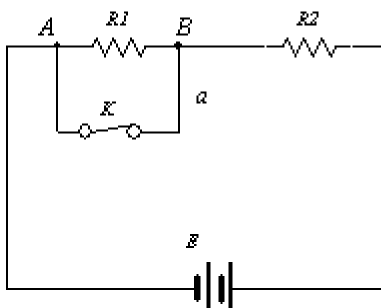
$$\frac{1}{R_e} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3} = \frac{R_1R_2 + R_1R_3 + R_2R_3}{R_1R_2R_3} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow R_e = \frac{R_1R_2R_3}{R_1R_2 + R_1R_3 + R_2R_3} = 1\Omega$$

2.35 Kolika je jačina struje koja protiče kroz otpornik R_1 kada je prekidač K:

a) otvoren
b) zatvoren

Vrednosti veličina prikaznih na crtežu su $R_1 = 60\Omega, R_2 = 40\Omega, r = 0, E = 10V$. Smatraj da je otpor provodnika *a* jednak nuli.

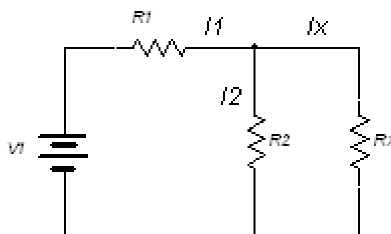


REŠENJE:

a) $I = \frac{E}{R_1 + R_2} = 0.1A$

b) Kada je prekidač K zatvoren napon na krajevima provodnika a je jednak nuli ($U_{AB} = 0$), pa je i jačina struje kroz otpornik jednaka nuli ($I_1 = \frac{U_{AB}}{R_1} = 0$)

2.36 Odrediti vrednost otpornosti R_x tako da se na njemu razvije maksimalna vrednost snage i naći tu snagu. Dato je $U = 120V, R_1 = 6\Omega, R_3 = 8\Omega$



REŠENJE:

$$I_x = I_1 \frac{R_2}{R_2 + R_x}$$

$$I_1 = \frac{U}{R_1 + \frac{R_2 R_x}{R_2 + R_x}} = \frac{U(R_2 + R_x)}{R_1(R_2 + R_x) + R_2 R_x}$$

$$I_x = \frac{R_2}{R_2 + R_x} \cdot \frac{U(R_2 + R_x)}{R_2 R_x + R_1(R_2 + R_x)} = \frac{UR_2}{R_2 R_x + R_1(R_2 + R_x)}$$

$$P_x = R_x I_x^{\ 2}$$

$$\frac{dP_x}{dR_x} = 0 \Rightarrow 14R_x = 48 \Rightarrow R_x = \frac{48}{14} \approx 3{,}14\Omega$$

$$I_1 = 14{,}28A$$

$$I_x = 10A$$

$$P_x = R_x I_x^{\ 2} = 343W$$

2.37 U kolu prikazanom na slici dato je $U = 36V, R_1 = 8\Omega, R_2 = 6\Omega$. Odrediti vrednost otpora R_x tako da se na njemu razvija maksimalna snaga kao i vrednost te snage.

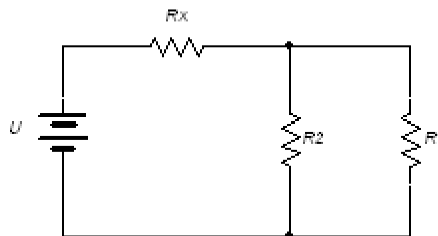
REŠENJE:

$$R_e = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} = \frac{8 \cdot 6}{8 + 6} = 3{,}43\Omega$$

$$P_x = R_x I^2$$

$$I = \frac{U}{R_e + R_x}$$

$$R_x = R_e$$



$$P = R_x \left(\frac{U}{R_e + R_x} \right)^2$$

$$\frac{dP}{dR_x} = 0$$

$$\frac{dP}{dR_x} = \left(\frac{U}{R_x + R_e} \right)^2 + R_x \cdot 2 \left(\frac{U}{R_x + R_e} \right) \left(\frac{-U}{(R_x + R_e)^2} \right) = 0$$

$$\frac{U^2}{(R_x+R_e)^2}-\frac{2R_xU^2}{(R_x+R_e)^3}=0$$

$$U^2\left(\frac{1}{(R_x+R_e)^2}-\frac{2R_x}{(R_x+R_e)^3}\right)=0$$

$$\frac{R_x+R_e-2R_x}{(R_x+R_e)^3}=0$$

$$R_e-R_x=0$$

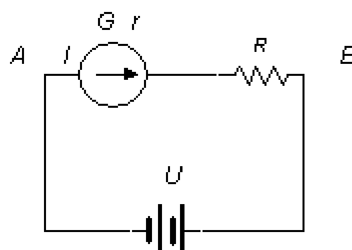
$$R_x=R_e$$

$$I=\frac{U}{R_x+R_e}=5{,}24A$$

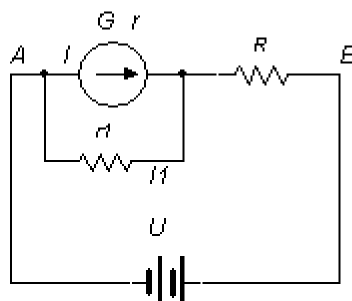
$$P_x=R_xI^2=94{,}46W$$

2.38 Galvanometar unutrašnje otpornosti $r=8\Omega$ vezan je na red sa otporom od $R=200\Omega$.Ako se otpor R zameni otporom $R_1=40\Omega$ da bi kroz galvanometar tekla struja iste jačine galvanometar se mora šantirati otporom r_1. Kolika je otpornost šanta?

REŠENJE:



$$(R+r)I=U$$



$$rI+R_1(I+I_1)=U$$

$$rI=r_1I_1\Rightarrow I_1=\frac{rI}{r_1}$$

$$rI+R_1\left(I+\frac{rI}{r_1}\right)=U$$

$$I\left(r+R_1+R_1\frac{r}{r_1}\right)=U$$

$$I=\frac{U}{R+r}$$

$$\frac{U}{R+r}\left(r+R_1+R_1\frac{r}{r_1}\right)=U$$

$$r + R_1 + R_1 \frac{r}{r_1} = R + r$$

$$R_1\left(1 + \frac{r}{r_1}\right) = R$$

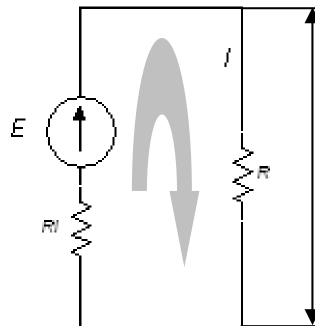
$$40\left(1 + \frac{r}{r_1}\right) = 200$$

$$r_1 = 2\Omega$$

Ovi otpornici služe za ograničenje struje kroz galvanometar.

2.39 Generator stalne elektromotorne sile $E = 20V$, unutrašnje otpornosti $R_i = 0{,}5\Omega$ i prijemnik otpornosti $R = 50\Omega$ vezani su kao na slici. Odrediti:

a) intenzitet struje u kolu
b) napon na krajevima prijemnika
c) električnu snagu prijemnika



REŠENJE:

$$a)\ I = \frac{E}{R_i + R} = \frac{20}{50 + 0{,}5} = \frac{20}{50{,}5} = 0{,}396A$$

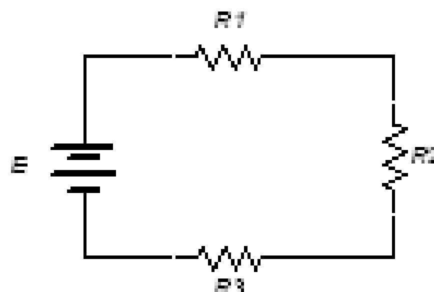
$$b)\ U = RI = 19{,}8V$$

$$c)\ P = I^2 R = 7{,}84W$$

2.40 Generator stalne elektromotorne sile $E = 20V$ i zanemarljive unutrašnje otpornosti i otpornici otpornosti $R_1 = 200\Omega, R_2 = 300\Omega\ i\ R_3 = 500\Omega$. Obrazuju električno kolo kao na slici. Odrediti napone na krajevima otpornika i snage na njima usled Džulovog efekta.

REŠENJE:

$$I = \frac{E}{R_1 + R_2 + R_3} = 20mA$$



$$U_1 = R_1 I = 4V$$

$$U_2 = R_2 I = 6V$$

$$U_3 = R_3 I = 10V$$

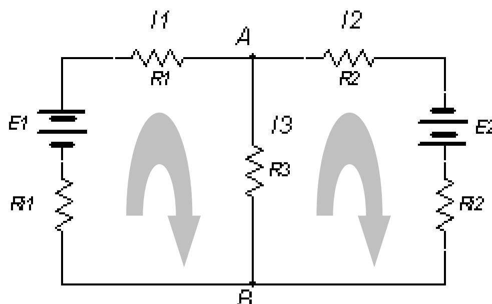
$$P_1 = R_1 I^2 = 80mV$$

$$P_2 = R_2 I^2 = 120mV$$

$$P_3 = R_3 I^2 = 200mV$$

$$EI = 400mV$$

2.41 Generator $E_1 = 20V$ i $E_2 = 6V$, unutrašnjih otpornosti $R_{i1} = 0,2\Omega$ i $R_{i2} = 0,05\Omega$ i prijemnici $R_1 = 300\Omega, R_2 = 700\Omega\, i\, R_3 = 400\Omega$ vezani su u kolo prokazano na slici. Odrediti struje u svim granama kola.



REŠENJE:

$I_1 + I_3 = I_2$

Na osnovu I Kirhofovog zakona može se napisati:

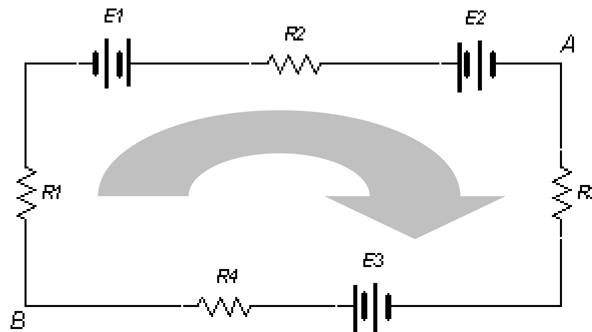
$$n_Č - 1 = 2 - 1 = 1$$
$$(R_{i1} + R_1)I_1 - R_3 I_3 = E_1$$
$$I_2(R_2 + R_{i2}) + R_3 I_3 = E_2$$
$$(I_1 + I_2)(R_2 + R_{i2}) = R_2 I_1 + R_2 I_2 + R_{i2} I_1 + R_{i2} I_2$$

Na osnovu II Kirhofovog zakona može se napisati:

$$n_g - (n_Č - 1) = 3 - 1 = 2$$
$$R_{i1} I_1 - E_1 + R_1 I_1 - R_3 R_3 = 0$$
$$R_2 I_2 - E_2 + R_{i2} I_2 + R_3 I_3 = 0$$
$$I_1(R_{i1} + R_1) - R_3 I_3 = E_1$$
$$I_1(R_2 + R_{i2}) + (R_3 + R_2 + R_{i2}) I_3 = E_2$$
$$300,2 I_1 - 400 I_3 = 20$$
$$700,05 I_1 + 1100,05 I_3 = 6$$
$$I_3 = -0,019A \approx -0,020A = -20mA$$
$$I_2 = 40 - 20 = 20mA$$
$$I_1 = 0,039A \approx 0,040A = 40mA$$

2.42 Tri generatora elektromotornih sila $E_1 = 25V, E_2 = 5V, E_3 = 30V$ i četri prijemnika otpornosti $R_1 = 100\Omega, R_2 = 50\Omega, R_3 = 150\Omega, R_4 = 200\Omega$, vezani su u kolo kao na slici. Odrediti jačinu struje u kolu i napon između tačaka A i B.

REŠENJE:



$$-E_1 + E_2 - E_3 + R_2 I + R_3 I + R_4 I + R_1 I = 0$$
$$I(R_1 + R_2 + R_3 + R_4) = E_1 + E_3 - E_2$$
$$I = \frac{50}{500} = 0{,}1A$$
$$U_{AB} + E_3 = R_3 I + R_4 I$$
$$U_{AB} = (R_3 + R_4)I - E_3 = 350 \cdot 0{,}1 - 30 = 5V$$

2.43 Električni toster namenjen za rad pri naponu od $U = 120V$ ima unutrašnji otpor $R = 10{,}6\Omega$. Kolika je snaga tog tostera?

REŠENJE:
$$P = \frac{U^2}{R} = \frac{120^2}{10{,}6} = 1360W$$

2.44 Sijalica snage $P = 100W$ namenjena je za rad na naponu $U = 220V$. Koliki je otpor sijalice na radnoj temperaturi? Kolika je jačina struje koja protiče kroz vlakno?

REŠENJE:

$$P = \frac{U^2}{R} \Rightarrow R = \frac{U^2}{P} = \frac{220^2}{100} = 484\Omega$$
$$P = UI \Rightarrow I = \frac{P}{U} = \frac{100}{220} = 0{,}45A$$

2.45 Uporedi količinu elektriciteta koja protekne u toku 1s kroz jedan poprečni presek vlakna sijalice za džepnu lampu snage $P_1 = 1W$ koja je priključena na izvor napona $U_1 = 4{,}5V$ i sijalice snage $P_2 = 60W$ koja je priključena na izvor napona $U_2 = 220V$.

REŠENJE:

Količine elektriciteta su:

$$Q_1 = I_1 t = \frac{P_1 \cdot t}{U_1} = 0{,}22C$$

$$Q_2 = I_2 t = \frac{P_2 \cdot t}{U_2} = 0{,}27C$$

U sijalicama se električna energija indirektno transformiše u svetlosnu, a ta energija ne zavisi samo od količine proteklog elektriciteta. Energija je:

$W = UIt = Pt$

Iako nema velike razlike između jačina struja (ili količina elektriciteta) druga sijalica «proizvodi» veću svetlosnu energiju jer se priključuje na viši napon.

2.46 Koliko vremena treba da protiče struja jačine $0{,}2kA$ kroz provodnik čiji je otpor $0{,}1k\Omega$ da bi se u njemu oslobodila količina toplote $0{,}4MJ$?

REŠENJE:

$$Q = RI^2 t \Rightarrow t = \frac{Q}{RI^2} = \frac{0{,}4 \cdot 10^6}{0{,}1 \cdot 10^3 \cdot (0{,}2 \cdot 10^3)^2} = 0{,}1s$$

2.47 Na izvor čija je EMS jednaka $E = 5V$, a unutrašnji otpor $r = 0{,}5\Omega$ priključen je potrošač otpora $R = 4{,}5\Omega$.

a) Koliki rad izvrše strane sile u izvoru u toku $t = 10s$?
b) Kolika se količina toplote oslobodi u izvoru za isto to vreme?
c) Kolika se količina toplote oslobodi u potrošaču za vreme $t = 10s$?
d) Kolika je, u toku tog istog vremena, oslobođena ukupna količina toplote u kolu?

REŠENJE:

a) $$E = \frac{A}{q} \Rightarrow A = Eq = EIt = E\frac{E}{R+r}t = \frac{E^2}{R+r}t = \frac{5^2}{4{,}5+0{,}5}10 = 50J$$

b) $$Q_r = rI^2 t = r\left(\frac{E}{R+r}\right)^2 t = 0{,}5\left(\frac{5}{4{,}5+0.5}\right)^2 \cdot 10 = 5J$$

c) $Q_R = R\left(\dfrac{E}{R+r}\right)^2 \cdot t = 4{,}5\left(\dfrac{5}{4{,}5+0{,}5}\right)^2 \cdot 10 = 45J$

d) $Q_{R+r} = Q_r + Q_R = 5 + 45 = 50J = A$

3. ELEKTROMAGNETIZAM

Amperova sila *kojom magnetno polje indukcije* $\vec{B}$ *deluje na provodnik dužine* l*, kroz koji protiče električne struja jačine* I*, jednaka je:*

$$\vec{F} = \overrightarrow{Il} x \vec{B}$$

gde vektor $\overrightarrow{Il}$ *ima smer kao električne struja. Intenzitet vektora* $\vec{F}$ *jednak je:*

$$F = BIl \sin\alpha$$

gde je α *ugao koji zaklapa provodnik sa magnetnim linijma sila datog polja. Jedinica za indukciju magnetnog polja je tesla (T):*

$$[B] = \frac{[F]}{[I]\cdot[l]} = 1\frac{N}{A\cdot m} = 1T$$

Lorencova sila *deluje na naelektrisanu česticu (količine elektriciteta* q*) koja se kreće brzinom* $\vec{\upsilon}$ *kroz magnetno polje indukcije* $\vec{B}$*:*

$$\vec{F} = q\vec{\upsilon}\, x\, \vec{B}$$

$$F = q\upsilon B \sin\alpha$$

gde je α *ugao koji zaklapa vektor brzine sa magnetnim linijama sila.*

Bio-Savarov zakon*: magnetno polje koje izaziva vrlo mali deo provodnika dužine* Δl*, kroz koji protiče električna struja jačine* I*, u tački koja je za* r *udaljena od tog elementa može se izraačunati kao:*

$$\overrightarrow{dB} = \frac{\mu_0}{4\pi}\cdot\frac{I\overrightarrow{dl} x \overrightarrow{r_0}}{r^2}$$

$$dB = \frac{\mu_0}{4\pi}\cdot\frac{I\cdot dl \sin\theta}{r^2}$$

gde je $\overrightarrow{r_0}$ *- jedinični vektor usmeren od posmatranog elementa ka tački u kojoj je indukcija polja* $\vec{B}$*, a* θ *ugao koji zaklapa jedinični vektor sa posmatranim elementom (sa vektorom* $I\overrightarrow{\Delta l}$*).*

Indukcija magnetnog polja na rastojanju r od ***dugog pravolinijskog provodnika*** *kroz koji protiče električna struja jačine I možemo izračunati po Bio-Savarovom zakonu:*

$$B = \frac{\mu_0}{2\pi}\cdot\frac{I}{r}$$

gde je $\mu_0 = 4\pi\cdot 10^{-7}\left(\frac{Tm}{A}\right)$ *magnetna permeabilnost vakuuma.*

*Indukcija magnetnog polja u centru **kružnog provodnika poluprečnika r** kroz koji protiče električna struja jačine I, možemo izračunati kao:*

$$B = \frac{\mu_0}{2} \cdot \frac{I}{r}$$

*Indukcija magnetnog polja u **centru solenoida** jednaka je:*

$$B = \mu_0 n I$$

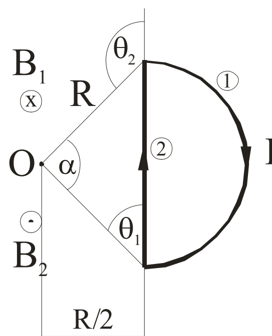
gde je n broj namotaja po jedinici dužine solenoida. Obrazac važi ako je dužina solenoida mnogo veća od njegovog prečnika.
Fluks homogenog magnetnog polja indukcije B kroz površinu S jednak je:

$$\Phi = BS\cos\varphi$$

*gde je φ ugao između normale ne površinu i magnetnih linija sila. Jedinica za fluks je **veber (Wb)**:*

$$[\Phi] = [B]\cdot[S] = 1T \cdot m^2 = 1Wb$$

3.1 Data je strujna kontura oblika kao na slici. Odrediti vektor indukcije B u tački O.



REŠENJE:

$$cos\frac{\alpha}{2} = \frac{\frac{R}{2}}{R} = \frac{R}{2}\cdot\frac{1}{R} = \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{\alpha}{2} = arccos\frac{1}{2} = 60^0$$

$$\alpha = 2\cdot 60^0 = 120^0$$

$\alpha = 120^0$ - 1/3 punog kruga

$$B_1 = \frac{1}{3}\cdot\frac{\mu_0 I}{2R}$$

$$B_2 = \frac{\mu_0 I}{4\pi\frac{R}{2}}\left(cos\,\theta_1 - cos\,\theta_2\right)$$

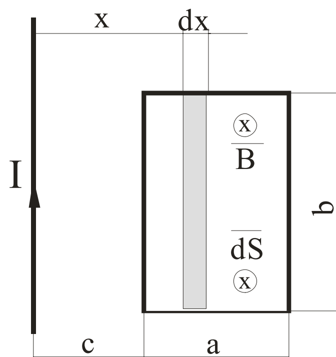
$$cos\,\theta_1 = cos\,30^0 = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$cos\,\theta_2 = cos\,150^0 = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$B_2 = \frac{\mu_0 I\sqrt{3}}{2\pi R}$$

$$B = B_2 - B_1 = \frac{\mu_0 I\sqrt{3}}{2\pi R} - \frac{1}{3}\cdot\frac{\mu_0 I}{2R} = \frac{\mu_0 I}{2R}\left(\frac{\sqrt{3}}{\pi} - \frac{1}{3}\right)$$

3.2 Odrediti fluks vektora magnetne indukcije koja potiče od beskonačno dugog provodnika kroz pravougaonu konturu dimenzija axb (u vakuumu).



REŠENJE:

$$\Phi = \int \vec{B}\cdot\overrightarrow{dS}$$

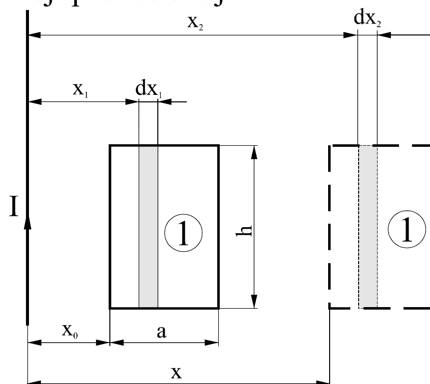
Fluks je pozitivan zbog istog smera vektora $\vec{B}$ i $\overrightarrow{dS}$.

$$dS = bdx$$

$$\Phi = \int_{c}^{c+a} \frac{\mu_0 I}{2\pi x} bdx = \frac{\mu_0 Ib}{2\pi}\int_{c}^{c+a}\frac{dx}{x} = \frac{\mu_0 Ib}{2\pi} ln\frac{c+a}{c}$$

$$\Phi = \frac{\mu_0 Ib}{2\pi} ln\frac{c+a}{c}$$

3.3 Odrediti proteklu količinu elektriciteta Q koja nastaje kada se pravougaona kontura otpornosti R, prikazana na slici, pomeri na rastojanje x od beskonačno dugog provodnika kroz koji protiče struja I.



REŠENJE:

$$\Delta\Phi = \Phi_2 - \Phi_1$$

$$e = -\frac{d\Phi}{dt}$$

$$i = \frac{e}{R} \qquad i = \frac{dQ}{dt}$$

$$Q = \int_0^t idt = \int_0^t \frac{e}{R}dt = \int_{\Phi_1}^{\Phi_2} -\frac{d\Phi}{Rdt}dt = -\frac{1}{R}(\Phi_2 - \Phi_1)$$

$$Q = \frac{1}{R}(\Phi_1 - \Phi_2)$$

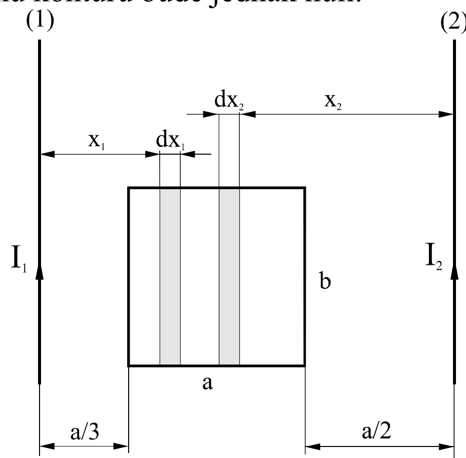
$$\Phi_1 = \int_{x_0}^{x_0+a} \frac{\mu_0 I}{2\pi x_1} hdx_1 = \frac{\mu_0 Ih}{2\pi}\int_{x_0}^{x_0+a} \frac{dx_1}{x_1} = \frac{\mu_0 Ih}{2\pi} ln\frac{x_0 + a}{x_0}$$

$$\Phi_2 = \int_{x}^{x+a} \frac{\mu_0 I}{2\pi x_2} hdx_2 = \frac{\mu_0 Ih}{2\pi} ln\frac{x + a}{x}$$

$$\Phi_1 - \Phi_2 = \frac{\mu_0 Ih}{2\pi} ln\frac{\frac{x_0 + a}{x_0}}{\frac{x + a}{x}} = \frac{\mu_0 Ih}{2\pi} ln\frac{x(x_0 + a)}{x_0(x + a)}$$

$$Q = \frac{\mu_0 Ih}{2\pi R} ln\frac{x(x_0 + a)}{x_0(x + a)}$$

3.4 Dva veoma duga paralelna pravolinijska provodnika i pravougaona kontura dimenzija *axb* nalaze se u istoj ravni, u vakuumu. Smer struje kroz provodnik (1) označen je na slici. Odrediti struju u drugom provodniku tako da magnetni fluks kroz pravougaonu konturu bude jednak nuli.



REŠENJE:

Iz uslova zadatka sledi da je:

$$\Delta\Phi = \Phi_1 - \Phi_2 = 0$$

$$\Phi_1 = \Phi_2$$

Kako je:

$$\Phi_1 = \int_{\frac{a}{3}}^{\frac{4a}{3}} \frac{\mu_0 I_1}{2\pi x_1} b dx_1 = \frac{\mu_0 I_1 b}{2\pi} \int_{\frac{a}{3}}^{\frac{4a}{3}} \frac{dx_1}{x_1}$$

$$\Phi_1 = \frac{\mu_0 I_1 b}{2\pi} \ln \frac{\frac{4a}{3}}{\frac{a}{3}} = \frac{\mu_0 I_1 b}{2\pi} \ln 4$$

i

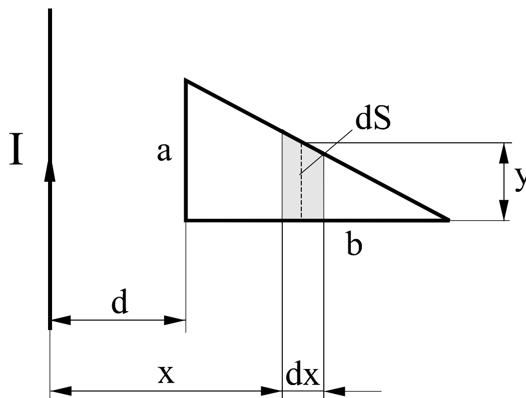
$$\Phi_2 = \int_{\frac{a}{2}}^{\frac{3a}{2}} \frac{\mu_0 I_2}{2\pi x_2} b dx_2 = \frac{\mu_0 I_2 b}{2\pi} ln 3$$

pa onda dobijamo:

$$\frac{\mu_0 I_1 b}{2\pi} ln 4 = \frac{\mu_0 I_2 b}{2\pi} ln 3$$

$$I_2 = I_1 \frac{ln 4}{ln 3} = 2 I_1 \frac{ln 2}{ln 3}$$

3.5 Provodnik savijen u obliku pravouglog trougla stranica $a = 10cm, b = 20cm$ nalazi se na rastojanju $d = 3cm$ od beskonačno dugog tankog pravolinijskog provodnika kroz koji teče struja $I = 50A$. Odrediti fluks kroz konturu.



REŠENJE:

$$\Phi = \oint_S \vec{B} \cdot \overrightarrow{dS} = \oint_S \frac{\mu_0 I}{2\pi x} dS = \int_d^{d+b} \frac{\mu_0 I}{2\pi x} \cdot \frac{a}{b} \cdot (d + b - x) dx = \frac{\mu_0 I a}{2\pi b} \int_d^{d+b} \frac{d + b - x}{x} dx$$

$dS = y \cdot dx$

$y = \frac{a}{b}(d + b - x)$

$\Phi = 1{,}34 \cdot 10^{-6} Wb$

3.6 U blizini magneta indukcija magnetnog polja iznosi $B = 10 mT$. Kolikom silom to polje deluje na deo provodnika dužine $\Delta l = 1 cm$ kroz koji protiče električna struja jačine $I = 0{,}1 kA$ ako provodnik zaklapa ugao $\varphi = 90^0$ sa magnetnim linijama sila? Uporedi tu silu sa težinom tela čija je masa $1g$.

REŠENJE:

$$F = BIl\, sin\, \varphi = 10 \cdot 10^{-3} \frac{N}{A \cdot m} \cdot 0{,}1 \cdot 10^3 A \cdot 10^{-2} m \cdot sin 90^0 = 0{,}01 N$$

Može se zapaziti da je sila malog intenziteta iako kroz provodnik protiče relativno „jaka“ struja. Ta sila je približno jednaka težini tela mase 1g.

3.7 Između polova magneta je polje indukcije $B = 1T$. U to polje postavljen je provodnik dužine $l = 0{,}3m$ kroz koji protiče električna struja. Kada je taj provodnik upravan na linije vektora indukcije onda magnetno polje na njega deluje silom $F = 9N$. Kolika je jačina struje koja protiče koja protiče kroz provodnik?

REŠENJE:

$F = BIl \sin \varphi$

$\varphi = 90^0 \Rightarrow I = \frac{F}{Bl} = 30A$

3.8 Kroz provodnik tramvajske linije protiče struja jačine $I = 400A$. Kolika je horizontalna komponenta sile kojom Zemljino magnetno polje deluje na dno provodnika dužine $l = 10m$ na mestu gde je vertikalna komponenta zemljinog magnetnog polja $B_y = 5 \cdot 10^{-6} T$?

REŠENJE:

$F_x = BIl\, sin\, \varphi = B_y Il = 0{,}02 N$

3.9 Pod kojim uglom u odnosu na magnetne linije sila magnetnog polja indukcije $B = 10mT$ treba postaviti provodnik dužine $l = 2m$ kroz koji protiče električna struja jačine $I = 5A$, pa da polje na provodnik deluje silom $F = 50mN$?

REŠENJE:

$$F = BIl\,sin\,\alpha \Rightarrow sin\,\alpha = \frac{F}{BIl} = \frac{1}{2} \Rightarrow \alpha = 30^0$$

3.10 Tipični laboratorijski kalem ima 1000 navoja po jednom metru dužine. Pretpostavimo da možemo smatrati da je njegova dužina mnogo veća od prečnika. Kolika će da bude indukcija magnetnog polja u centru kalema (solenoida) kada se kroz njega propusti električna struja jačine $I = 10A$?

REŠENJE:

$$B = \mu_0 nI = 12{,}57mT$$

3.11 Elektron uleti u homogeno magnetno polje brzinom $\upsilon = 2 \cdot 10^7 \frac{m}{s}$. Koliki ugao sa magnetnim linijama sila treba da zaklapa vektor brzine da bi magnetno polje delovalo na elektron silom $F = 1{,}6pN$?

REŠENJE:

$$F = e\upsilon B\,sin\,\alpha \Rightarrow sin\,\alpha = \frac{F}{e\upsilon B} = \frac{1}{2} \Rightarrow \alpha = 30^0$$

3.12 Ram oblika kvadrata stranice $a = 20cm$ nalazi se u homogenom magnetnom polju indukcije $B = 1mT$. Koliki je maksimalni fluks magnetnog polja kroz ovaj ram?

REŠENJE:

Fluks je maksimalan kada je ram upravan na magnetne linije sila polja. Tada je:

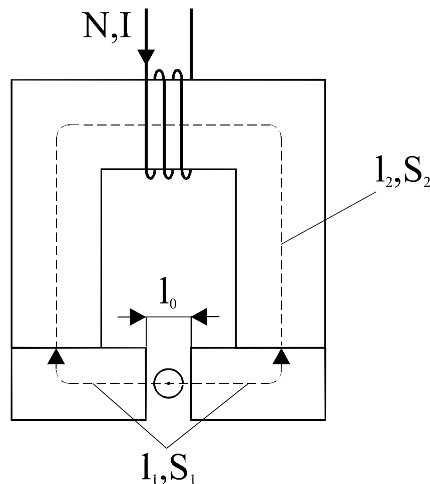
$$\Phi = BS = Ba^2 = 10^{-3}\left(2 \cdot 10^{-1}\right)^2 = 10^{-3} \cdot 4 \cdot 10^{-2} = 4 \cdot 10^{-5} = 40\mu Wb$$

3.13 Kružna kontura nalazi se u homogenom magnetnom polju indukcije $B = 0{,}1T$ ali tako da normala na površinu konture zaklapa ugao $\varphi = 60^0$ sa magnetnim linijama sila. Ako je fluks magnetnog polja kroz konturu $\Phi = 10mWb$ koliki je onda poluprečnik konture?

REŠENJE:

$$\Phi = BS\cos\varphi = Br^2\pi\cos\varphi \Rightarrow r = \sqrt{\frac{\Phi}{B\pi\cos\varphi}} = 25{,}2cm$$

3.14 Dat je elektromagnet čije su dužine srednjih linija $l_1 = 10cm, l_2 = 20cm, l_0 = 0{,}2mm$. Površine poprečnog preseka jezgra elektromagneta su $S_1 = 4cm^2, S_2 = 8cm^2$ i kvadratnog su oblika. Jezgro je napravljeno od materijala čija se karakteristika magnećenja može predstaviti funkcijom $H(B) = 10^3 B^2 \left(\frac{A}{m}\right)$. Odrediti struju I kroz namotaj elektromagneta ako je broj namotaja $N = 400$, tako da sila na provodnik u vazdušnom procepu kroz koji teče struja $I_1 = 1A$ bude $F = 16 \cdot 10^{-3} N$.



REŠENJE:

Sila u vazdušnom procepu je:
$F = I_1 \cdot l \cdot B_0$ odakle se izračunava magnetna indukcija B_0.
$l = 2cm$ - se izračunava iz odnosa $S_1 = l^2$ i predstavlja dužinu provodnika u polju.

$$B_0 = \frac{F}{I_1 \cdot l} = 0{,}8T$$

Fluks je isti u celom kolu:

$$B_0 S_0 = B_1 S_1 = B_2 S_2 \Rightarrow B_0 = B_1 = 0{,}8T$$

$$B_2 = 0{,}4T$$

$$H_0 = \frac{B_0}{\mu_0} = 636619{,}77\frac{A}{m}$$

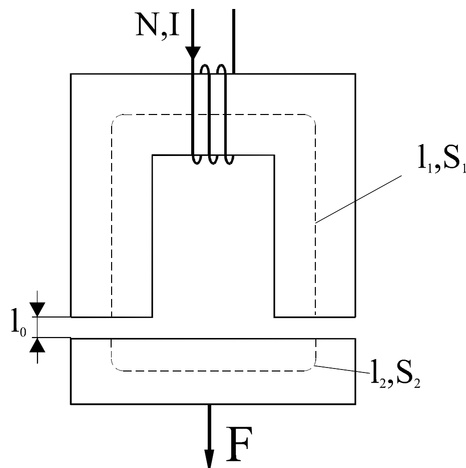
$H_1 = 10^3 B_1^{\ 2} = 640 \frac{A}{m}$

$H_2 = 10^3 B_2^{\ 2} = 160 \frac{A}{m}$

$NI = H_0 l_0 + H_1 l_1 + H_2 l_2 \Rightarrow I = 0{,}558A$

3.15 Elektromagnetom preseka $S_1 = S_2 = 6cm^2$ sa $N = 400$ zavojaka podiže teret mase $m = 80kg$. Dimenzije naznačene na slici su $l_1 = 30cm, l_2 = 10cm, l_0 = 0{,}3mm$. Odredit minimalnu vrednost struje za podizanje tereta i energiju u vazdušnom zazoru. Za koliko treba povećati struju kroz namotaje ako se l_0 poveća na $0{,}5mm$ da bi sila ostala nepromenjena. Polje je homogeno, a rasipni fluks zanemarljiv. Karakterisitka magnećenja je data tablicom:

$H(A/m)$	0	100	200	300	400	500	600	700
$B(T)$	0	0,35	0,65	0,80	1,00	1,10	1,25	1,30



REŠENJE:

Na teret mase m deluje zemljina teža silom

$F = mg = 784{,}8N$

Ova sila se uravnotežava sa privlačnom silom elektromagneta pa je:

$F^{/} = \frac{B_0^{\ 2} S}{2\mu_0}$ - odakle se izračunava magnetna indukcija B_0.

$F = F^{/} \Rightarrow B_0 1{,}28T$

Fluks je isti u celom magnetnom polju:

$S_0 B_0 = S_1 B_1 = S_2 B_2 \Rightarrow B_0 = B_1 = B_2 = 1{,}28T$

$H_0 = \dfrac{B_0}{\mu_0} = 1018591{,}6 \dfrac{A}{m}$

$H_1 = H_2 = 650 \dfrac{A}{m}$

$NI_1 = 2H_0 l_0 + H_1 l_1 + H_2 l_2$

$I_1 = 2{,}17A$

$NI_2 = 2H_0 l_0^{/} + H_1 l_1 + H_2 l_2$

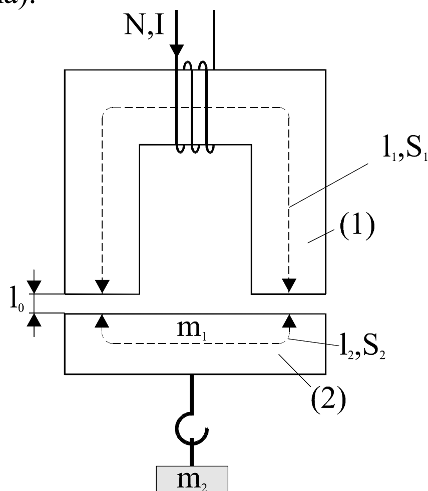
$I_2 = 3{,}196A$

$W = \dfrac{1}{2} B_0 H_0 \cdot 2S_0 l_0 = 0{,}23J$

3.16 Elektromagnetom prema slici podiže se teret $m = 60kg$. Dužine i preseci naznačeni na slici su: $l_0 = 0{,}3mm$, $l_1 = 40cm$, $l_2 = 12cm$, $S_1 = S_0 = 6cm^2$, $S_2 = 7cm^2$. Ako je rasipni fluks zanearljiv, a polje u zazoru homogeno i kalem ima $N = 400$ zavojaka, odrediti minimalnu vrednost struje za podizanje tereta. Pri dozvoljenoj gustini struje $j = 5\dfrac{A}{mm^2}$, odrediti prečnik provodnika. Kriva magnećenja je data tablicom:

$H(A/m)$	0	100	200	400	600	700
$B(T)$	0	0,15	0,5	1,0	1,25	1,3
$B(T)$	0	0,1	0,25	0,75		1,0

Ovo su tablice magnećenja za oblasti (1) i (2). Tačke na grafiku B=B(H) spajati pravim linijama (dužima).



REŠENJE:

$F = mg = 60g = 588{,}6N$

$m = m_1 + m_2 = 60kg$

$S = 2S_0 = 12cm^2$

$F^{/} = \dfrac{B_0^{\,2} S}{2\mu_0}$

$F = F^{/} \Rightarrow B_0 = 1{,}11T$

$\Phi = const.$

$B_0 S_0 = B_1 S_1 = B_2 S_2 \Rightarrow B_1 = B_0 = 1{,}11T$

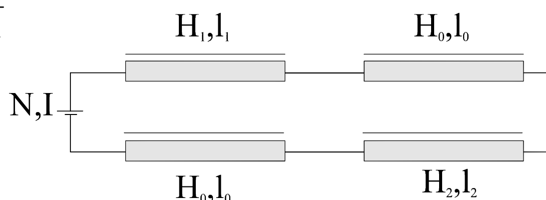
$B_2 = \dfrac{B_0 S_0}{S_2} = 0{,}95T$

$NI = 2H_0 l_0 + H_1 l_1 + H_2 l_2 \Rightarrow$

$B_0 = 1{,}11T \qquad H_0 = \dfrac{B_0}{\mu_0} = 883309{,}9\dfrac{A}{m}$

$B_1 = 1{,}11T \qquad H_1 = 470\dfrac{A}{m}$

$B_2 = 0{,}95T \qquad H_2 = 650\dfrac{A}{m}$



ekvivalentna šema magnetnog kola

$I = 1{,}99A$

$S = \dfrac{I}{j} \Rightarrow d = 0{,}71mm$

3.17 Elektromagnet se sastoji od jezgra, na kome se nalazi namotaj sa N navojaka i kotve. Jezgro je kvadratnog poprečnog preseka $S = a \times a$, dužine srednje linije l_1 i načinjeno je od feromagnetnog materijala čija se karakteristika magnećenja može aproksimirati dužima koje B-H koordinatnom sistemu spajaju tačke

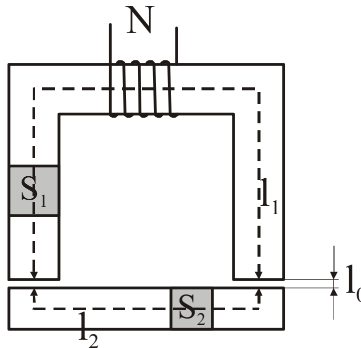
B(T)	0	0.1	0.9	1.0
H(A/m)	0	100	200	400

Kotva je takođe kvadratnog poprečnog preseka $S_2 = b \times b$ ima dužinu srednje linije l_2 i načinjena je od materijala čija se karakterisitika magnećenja može aproksimirati dužima koje u B-H koordinatnom sistemu spajaju tačke

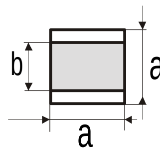
B(T)	0	0.1	1.0	1.2

H(A/m)	0	50	100	400

Dužina vazdušnog procepa između jezgra i kotve je l_0. Zanemariti rasipni fluks. Odrediti struju kroz namotaj tako da noseća sila ovog elektromagneta ima vrednost F. Numerički podaci: a=6cm, b=4cm, l_1=0.5m, l_2=0.2m, l_0=0.5mm, N=500, F=936N.



REŠENJE: Najpre treba odrediti površinu vazdušnog procepa, odnosno površinu u vazdušnom procepu izmeću jezgra i kotve kroz koju se zatvaraju linije polja. Posmatrajmo presek elektromagneta načinjen kroz jezgro (sl.1a). Očigledno je da je zajednička površina, površina kroz koju se zatvaraju linije polja, ona tamnije osenčena i da iznosi $S_0 = axb = 24cm^2$.



Iz poznate noseće sile elektromagneta

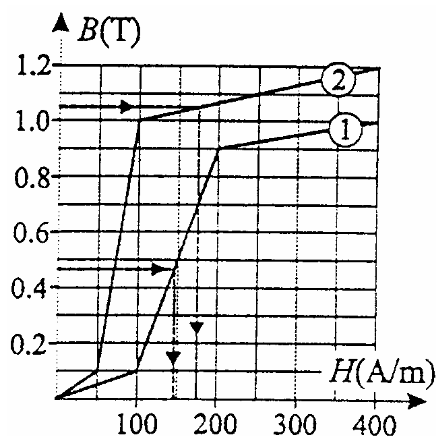
$$F = \frac{B_0^2}{2\mu_0} 2S_0 = \frac{B_0^2}{\mu_0} S_0$$

može se odrediti indukcija u vazdušnom procepu

$$B_0 = \sqrt{\frac{\mu_0 F}{S_0}} = 0.7T$$

dok se iz uslova $B_0 S_0 = B_1 S_1 = B_2 S_2$

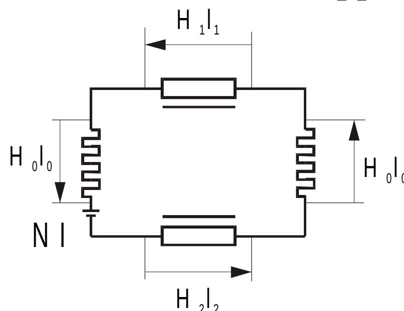
određuju magnetne indukcije u jezgru $B_1 = 0.467T$ i kotvi $B_2 = 1.05T$, a sa karakterisitike magnećenja materijala (sl.1b) odgovarajuće jačine magnetnog polja: $H_1 \approx 146 A/m$ i $H_2 \approx 175 A/m$



Kako je jačina magnetnog polja u vazdušnom procepu

$$H_0 = B_0 / \mu_0 \approx 5.57 \cdot 10^5 \; A/m$$

potrebna magnetopobudna sila je (sl.1c) $NI = H_1 l_1 + H_2 l_2 + 2H_0 l_0 \approx 665 A$



sl.1c

odnosno struja kroz namotaj je $I \approx 1.33 A$

3.18 Dva bakarna provodnika (ρ=1,75·10^{-8} Ωm) dužine L=25 m, preseka S=50 mm^2, na međusobnom rastojanju d=10 cm, pričvršćeni su za zid nosačima od izolatora. Nosači se nalaze na rastojanju od 1 m. Vodovi se koriste za priključivanje uređaja na napon U=120V. Odrediti srednju prosečnu silu koja deluje na jedan noseći izolator pri kratkom spoju na uređaju.

REŠENJE: Ukupna otpornost oba provodnika je $R_v = 2R' = 2\rho \dfrac{L}{S}$, a posle zamene brojnih vrednosti je:

$$R_v = 2 \cdot 1{,}75 \cdot 10^{-8} \frac{25}{50 \cdot 10^{-6}} = 17{,}5 \cdot 10^{-3} \; \Omega$$

Pri kratkom spoju na uređaju kroz vodove teče struja:

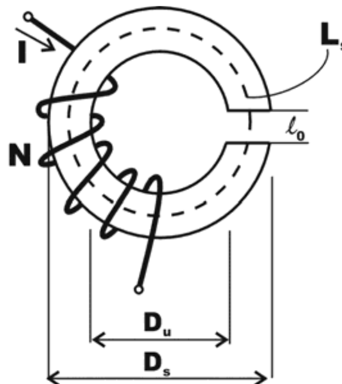
$$I_k = \frac{U}{R_v} = \frac{120}{1{,}75 \cdot 10^{-3}} = 6{,}86 \cdot 10^3 \text{ A}$$

Ukupna sila koja deluje na provodnike je:

$$F = \frac{\mu_o I_1 I_2 L}{2\pi \cdot d} = \frac{\mu_o I^2 L}{2\pi \cdot d} = \frac{4\pi \cdot 10^{-7} (6860)^2 25}{2 \cdot 10 \cdot 10^{-2}} = 2352{,}98 \text{ N} = 2353 \text{ N}$$

Broj nosećih izolatorskih nosača je $n = \frac{L}{d} + 1 = \frac{25}{1} + 1 = 26$, a sila koja opterećuje jedan nosač je $F' = \frac{F}{n} = \frac{2353}{26} = 90{,}5$ N.

3.19 Jačina električne struje I=1,2A kroz N zavojaka namotaja izaziva u vazdušnom zazoru (l_o=1 mm) fluks Φ=1mWb. Dimenzije torusa naznačene su na slici (D_s=150 mm, D_u=90 mm). Ako je pri toj struji jačina magnetnog polja u torusu 800 A/m, izračunati broj zavojaka namotaja.



REŠENJE:
Srednja indukciona linija u torusu je:

$$L_s = \left(\frac{D_s + D_u}{2} \right) \pi - l_o = (120\pi - 1) \cdot 10^{-3} \text{ m}$$

a u zazoru $l_o = 10^{-3}$m. S obzirom da je $\Phi = B_o S_o = B_1 S_1$ i
$S = S_o = S_1 = 0{,}25 \cdot (0{,}03)^2 \cdot 3{,}14 = 7{,}065 \text{ cm}^2$
vrednosti indukcije u zazoru je Bo=Φ/S=1,415T, a jačine polja $H_o = B_o/\mu_o = 1{,}27 \cdot 10^6$A/m. Na osnovu zakona ukupne struje je:

$$N \cdot I = H_o l_o + H_1 l_1 = 10^{-3} \cdot 1{,}27 \cdot 10^6 + 10^{-3} (120\pi - 1) 800 = 1127 + 301 = 1427{,}7$$

odakle je N=1427,7/1,2=1190 .

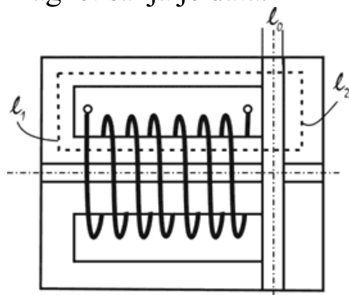
3.20 Koliko procenata će se smanjiti privlačna sila elektromagneta ako temperatura namotaja poraste na 50°C. Provodnik namotaja je od bakra (α=0,004 1/°C). Radna tačka u magnetnom kolu nije u oblasti zasićenja.

REŠENJE:
Otpornost namotaja na temperaturi od 50°C je
$R_{50} = R_o(1+\alpha(50-0)) = R_o(1+0{,}004\cdot 50) = 1{,}2R_o$.
Ako je napon konstantan, struja kroz otpornik pri zagrevanju opadne na $I_{50}=U/R_{50}=0{,}83I_o$, gde je I_o– struja nezagrejanog provodnika. Za isti odnos se smanji magnetopobudna sila, fluks i indukcija. Iz Maxwell-ove formule zbog nezasićenosti magnetnog kola i fluks kao i indukcija $\Phi_{50}=0{,}83\cdot\Phi_o$ i $B_{50}=0{,}83\cdot B_o$
Kako je po Maxwell-ovoj formuli privlačna sila elektromagneta:

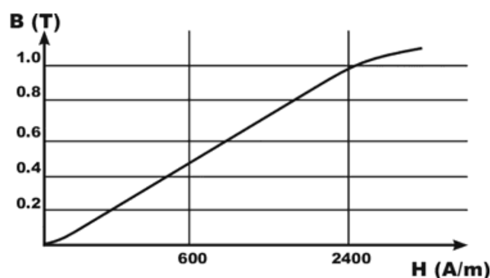
$$F_{50} = \frac{B^2 S}{2\mu_o} = \frac{B_{50}^2 S}{2\mu_o} = \frac{(0{,}83B_o)^2 S}{2\mu_o} = 0{,}83^2 F_o = 0{,}69F_o \ .$$

Sila privlačenja se zbog zagrevanja provodnika smanjila za 31%.

3.21 Za prenos rotacionog kretanja sa motora na radni deo mašine frikcione spojnice treba obezbediti silu F=1 kN, kojom se delovi spojnice privlače pri zazoru l_o=0,3 mm između delova magnetnog kola. Dužine srednjih linija indukcije su l_1=21 cm i l_2=9 cm. Presek magnetnog kola S=80cm^2 je isti po celoj dužini linija polja. Odrediti potrebnu jačinu struje ako spojnica ima N=300 zavojaka. Kriva magnetisanja je data.



a)



b)

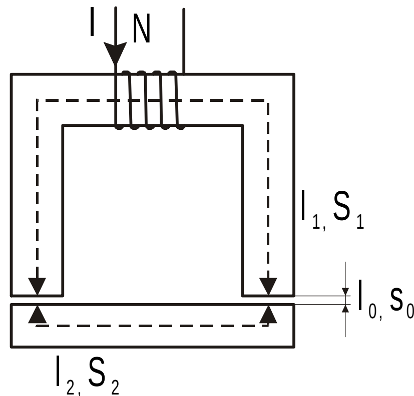
REŠENJE: Iz Maxwell-ove formule $F = \frac{B^2 S}{2\mu_o}$ dobija se vrednost indukcije B=0,56T. Iz krive magnetisanja se nalazi da je pri ovoj indukciji jačina polja H=600 A/m. Pošto je u vazdušnom zazoru $B=B_o=\mu_o H_o$, $H_o=B/\mu_o$ po zakonu ukupne struje je:

$$NI = 2H_o l_o + H_1 l_1 + H_2 l_2 = 2\frac{B}{\mu_o} l_o + H(l_1 + l_2) = 267{,}5 + 180 = 447{,}5 \text{ A}$$

S obzirom da je broj zavojaka N=300, potrebna jačina struje za obezbeđenje sile privlačenja F=1 kN je I=447,5/300=1,49 A.

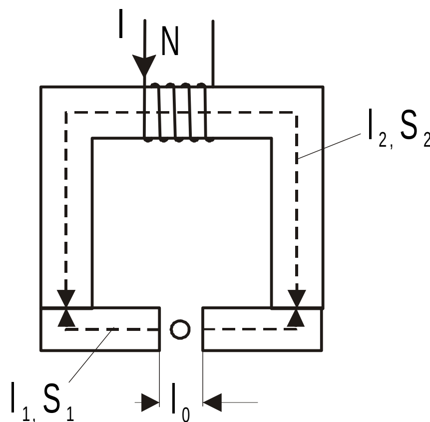
3.22 Privlačna sila elektromagneta čiji namotaj ima N=450 zavojaka je F=620N. Dimenzije magnetnog kola elektromagneta su naznačene na slici: $S_0=S_1=S_2$=6cm^2, l_0=0.3mm, l_1=30cm i l_2=10cm. Zavisnost B=B(H) je data tabelarno:

B(T)	0	0.2	0.4	0.6	0.8	1.0	1.2
H(A/m)	0	40	95	160	270	440	850



Odrediti jačinu struje kroz namotaj i energiju polja u vazdušnom zazoru. Rasipni fluks u magnetnom kolu je zanemarljiv.
REŠENJE: Vidi zadatak 3.17

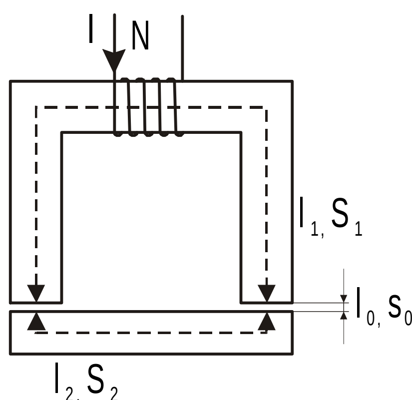
3.23 Dat je elektromagnet sa dužinama srednjih linija l_1=10cm, l_2=20cm, l_0=0.2mm. Površine poprečnog preseka su S_1=4cm^2, S_2=8cm^2 i kvadratnog su oblika. Jezgro je napravljeno od materijala čija se karakterisitika magnećenja može predstaviti



$f = H(B) = 10^3 B^2 (A/m)$. Odrediti struju I kroz namotaj elektromagneta ako je broj namotaja N=400, tako da sila na provodnik u vazdušnom procepu kroz koji teče struja I_1=1A bude $F = 16 \cdot 10^{-3} N$.
REŠENJE: Vidi zadatak 3.17

3.24 Elektromagnetom preseka S_1=S_2=6cm^2 sa N=400 zavojaka podiže se teret mase m=80kg. Dimenzije naznačene na slici su l_1=30cm, l_2=10cm i l_3=0.3mm. Odrediti minimalnu vrednost struje za podizanje tereta i energiju u vazdušnom zazoru. Za koliko treba povećati struju kroz namotaje ako se l_0 poveća na l_0=0.5mm da bi sila ostala nepromenjena. Polje je homogeno, a rasipni fluks zanemraljiv.

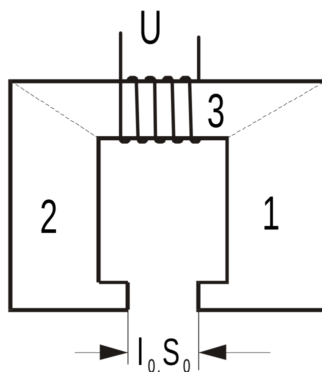
H(A/m)	0	100	200	300	400	500	600	700
B(T)	0	0.35	0.65	0.8	1.0	1.1	1.25	1.3



REŠENJE: Vidi zadatak 3.17

3.25 Kriva magnetisanja materijala magnetnog kola data je tabelarno, a dimenzije magnetnog kola su: l_0=1mm, l_1=l_2=25cm, l_3=10cm, S_0=S_1=S_2=25cm^2, S_3=100cm^3. Namotaj (N=300 zavojaka) je priključen na napon U=24V. Odrediti jačinu struje I pri kojoj je indukcija u vazdućnom zazoru B_0=1T, snagu toplih gubitaka u namotaju i privlačnu silu izmeću polova elektromagneta. Rasipni fluks zanemariti.

B(T)	0.2	0.4	0.6	0.8	1.0	1.2
H(A/m)	40	65	100	130	200	400



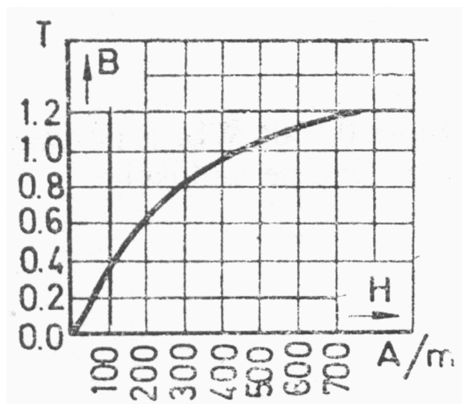
sl.9

REŠENJE: Vidi zadatak 3.17

3.26 Dužina jezgra elektromagneta iznosi 0.10m, a površina poprečnog preseka 0.01m^2. Odrediti magnetni fluks elektromagneta ako se zna da mu se kalem sastoji iz 1000 navoja , a kroz njega protiče struja od 0.04A. Relativni magnetni permeabilitet je 1500.

REŠENJE: Jačina magnetnog polja u unutrašnjosti solenoida sračunavamo po formuli

$$H = \frac{IN}{l}\left(\frac{A}{m}\right)$$



gde je:
I – jačina struje (A)
N – broj navoja
l – dužina (m)

Kada znamo jačinu magnetnog polja i relativni permeabilitet možemo naći jačinu magnetne indukcije B po formuli

$$B = \mu_a H = \mu_0 \mu_r H$$

μ_a - je apsolutni permeabilitet

μ_0 - je permeabilitet vakuuma i sistemu SI iznosi $4\pi \cdot 10^{-7}\ H/m$

μ_r - relativna permeabilnost

Pošto nam je poznata jačina magnetne indukcije i poprečni presek solenoida možemo dobiti magnetni fluks

$$\Phi = BS = \mu_0 \mu_r HS = \mu_0 \mu_r \frac{IN}{l} S$$

$$\Phi = 0.4 \cdot \pi \cdot 10^{-6} \cdot 1500 \cdot \frac{0.04 \cdot 1000}{0.1} \cdot 0.01$$

$$\Phi = 0.075Wb$$

3.27 Naći jačinu struje koja treba da protiče kroz kalem sa 300 navoja, srednje dužine magnetnog jezgra 0.8m, poprečnog preseka 0.0016m^2 i vazdušnog proreza l_v=0.002m, da bi jačina magnetne indukcije B iznosila 0.8T. Koeficijent magnetnog rasipanja u vazdušnom prorezu jednak je nuli.

REŠENJE: Magnetni fluks u vazdušnom prorezu i magnetnom jezgru iznosi:

$$\Phi = BS = 0.8 \cdot 0.0016 = 0.00128Wb$$

Prema krivoj magnećenja materijala nalazimo jačinu magnetnog polja u čeliku za jačinu magnetne indukcije

$B = 0.8T$

$H_C = 300 \, A/m$

$H_C = \frac{IN}{l_C}$

$IN = H_C l_C = 300 \cdot 0.8$

$IN = 240 \, ampernavojaka$

Jačina magnetnog polja u vazdušnom prorezu iznosi

$$H_v = \frac{B}{\mu_0} = \frac{0.8}{0.4 \cdot \pi \cdot 10^{-6}} = \frac{8 \cdot 10^5}{0.4 \cdot \pi} =$$

$$= 6.7 \cdot 10^5$$

$H_v = 67 \cdot 10^4 \; A/m$

$IN = H_v \cdot l_v = 67 \cdot 10^4 \cdot 0.002 = 1340 AN$

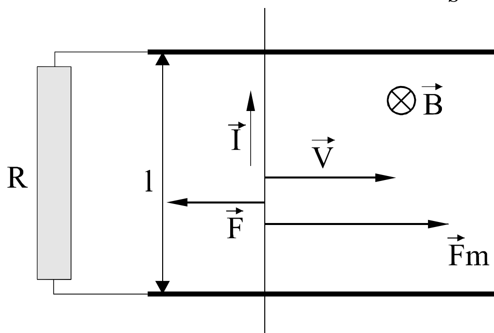
Magnetopobudna sila M iznosi:

$M = H_C l_C + H_v l_v = 240 + 1340 = 1580 A$

Jačina struje koja protiče kroz namotaj kalema izračunavamo po formuli

$$I = \frac{M}{N} = \frac{1580}{300} = 5.26 A$$

3.28 Po šinama čije je međusobno rastojanje l, kreće se provodnik brzinom υ. Šine leže normalno na magnetno polje indukcije B, a zatvorene su otpornikom R. Naći struju I kroz kolo kao i mehaničku silu, po intenzitetu i pravcu, da bi se savladala sila reakcije. Zadati podaci: $l = 1m, \upsilon = 20\frac{m}{s}, B = 1{,}2T, R = 0{,}1\Omega$



REŠENJE:

Prilikom kretanja provodnika kroz polje magnetne indukcije B indukuje se elektromotorna sila e:

$$e = \vec{l}\left(\vec{\upsilon} x \vec{B}\right)$$

$$e = l \cdot \upsilon \cdot B$$

$$I = \frac{e}{R} = \frac{l \cdot \upsilon \cdot B}{R} = 240A$$

$$\vec{F} = I \cdot l \cdot B$$

$$F = 240 \cdot 1 \cdot 1{,}2 = 288N$$

Da bi se provodnik kretao konstantnom brzinom mora da deluje mehanička sila

$$F_m = F = 288N$$

koja ima pravac i smer brzine $\vec{\upsilon}$.

3.29 Pravougaoni ram stranica $a = 10cm$ i $b = 5cm$ ima $n = 10$ namotaja tanke žice. Ram se postavi u magnetno polje indukcije $B = 0{,}1T$ tako da magnetne linije sila budu paralelne sa ravni rama. Koliki će da bude magnetni moment, a koliki obrtni moment magnetnih linija sila kada se kroz provodnik propusti struja jačine $I = 1A$?

REŠENJE:

$$p_m = nIS = nabI = 5 \cdot 10^{-2}$$

$$M = p_m B = 5 \cdot 10^{-3} N \cdot m$$

4. KOLA SA NAIZMENIČNOM STRUJOM. RLC ELEMENTI U KOLIMA. SNAGA, FAKTOR SNAGE. TROFAZNI SISTEM. OBRTNO MAGNETNO POLJE. MERNI MOSTOVI

Za periodične funkcije važi relacija :

$$f(t) = f(t + kT) \ , \ k = -n, -(n-1), \dots, -2, -1, 1, 2, \dots,$$

gde je T–perioda odnosno vreme trajanja jednog ciklusa.
U elektrotehnici su sledeće veličine opisane periodičnim funkcijama:

$$f(t) \in \{e(t),\ u(t),\ i(t),\ p(t)\}$$

Prostoperiodične funkcije vremena imaju oblik trigonometrijskih funkcija sinusa i kosinusa.
Prostoperiodična elektromotorna sila se analitički izražava u obliku :

$$e(t) = e = E_m \cos(\omega t + \theta) = E_m \cos(2\pi f + \theta) \ ,$$

gde je: E_m *–amplituda,* ω *–kružna učestanost,* f*–učestanost,* θ*–početna faza, a* $\omega t+\theta$*–faza periodične funkcije.*
Efektivna vrednost periodične struje izračunava se prema relaciji:

$$I_{eff} = \frac{1}{T}\int_0^T i^2(t)dt$$

a srednja vrednost u intervalu trajanja jedne periode T:

$$I_{sr} = \frac{1}{T}\int_0^T i(t)dt$$

U slučaju prostoperiodične vremenske promene struje važi :

$$I_{eff} = \frac{I_m}{\sqrt{2}} \quad i \quad I_{sr} = \frac{2I_m}{\pi} = 0{,}637 I_m$$

Padovi napona na pasivnim komponentama kola sa naizmeničnom strujom su:

$$u_R = R \cdot i \ , \quad u_L = L\frac{di}{dt} \quad i \quad u_C = \frac{1}{C}\int_0^T i(t)dt$$

Kada se kolo sa rednom vezom otpornosti R, induktivnosti L i kapaciteta C priključe na napon
$u=U_m \cos \omega t$ *u kolu će teći struja :*

$$i = i(t) = I_m \cos(\omega t - \varphi) \ , \ \text{gde je } I_m = \frac{U_m}{Z} \ \text{amplituda struje}.$$

Impedansa kola je:

$$Z = \sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2}$$

a $X_L=\omega \cdot L$ reaktansa kalema i $X_C=1/\omega C$ reaktansa kondenzatora, a fazna razlika:

$$\varphi = arctg\frac{\omega L - \frac{1}{\omega C}}{R}$$

Prostoperiodične veličine se mogu predstaviti obrtnim vektorima (fazorima), koji su određeni intenzitetom i uglom u odnosu na referentnu osu kao što je naizmenična veličina određena amplitudom i početnom fazom. Shodno tome sabiranje struja i napona u kolu vrši se kao i kod vektora.
Ako se prostoperiodične veličine mogu predstaviti obrtnim vektorima, a vektori kompleksnim brojevima u kompleksnoj ravni onda se prostoperiodične veličine mogu predstaviti kompleksnim brojevima uvođenjem kompleksnih predstavnika.
Kompleksni broj A se može predstaviti na jedan od načina:

$$A = a_1 + ja_2 = A_m e^{j\theta} = A_m(\cos\theta + j\sin\theta)$$

pri čemu je :

$$A_m = \sqrt{a_1^2 + a_2^2} \qquad \theta = arctg\frac{a_2}{a_1}$$

Napon i struja u kompleksnom obliku su :

$$\overline{U} = U_m e^{j\theta_u} \quad \overline{I} = I_m e^{j\theta_i} = I_a + jI_r$$

a impedansa Z i admitansa Y su :

$$\overline{Z} = R + jX = Z(\cos\varphi + j\sin\varphi) = Z \cdot e^{j\varphi}$$

$$\overline{Y} = \frac{1}{\overline{Z}} = \frac{1}{R + jX} = \frac{R}{R^2 + X^2} - j\frac{X}{R^2 + X^2} = G + jB$$

gde je G–konduktansa, a B–susceptansa.
Pri rešavanju kola naizmenične struje korišćenjem kompleksnog računa koriste se sve moguće metode koje se koriste za rešavanje kola jednosmerne struje. Pri tome je omogućeno i crtanje fazorskih dijagrama napona i struja.
Prelaz sa kompleksne na trenutnu vrednost naizmenične struje vrši se na osnovu relacije :

$$i(t) = \mathrm{Re}\left\{\overline{I}e^{j\omega t}\right\} = I_m\cos(\omega t + \theta_i) \quad .$$

Snaga naizmenične struje u kompleksnom obliku je :

$$\overline{S} = P + jQ \quad ,$$

aktivna snaga: $P = \frac{1}{2}U_m I_m \cos\varphi = UI\cos\varphi$ *(W)*

reaktivna snaga: $Q = \frac{1}{2}U_m I_m \sin\varphi = UI\sin\varphi$ *(VAr)*

prividna snaga : $S = \frac{1}{2} U_m I_m = UI \quad (VA)$

Uslov prilagođenja prijemnika na generator u kolu naizmenične struje je:

$\overline{Z}_p = \overline{\overline{Z}}_g \quad (R_p = R_g, X_p = -X_g)$

Uslov za rezonansu u kolu sa rednom vezom otpornika R,induktivnosti L i kapaciteta C je :

$X_L = X_C \;,\; \omega L = \frac{1}{\omega C}$ *tj.* $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$ *, pri čemu je* $I_m = \frac{U}{R}$.

U kolu koje sadrži paralelnu vezu kalema (R, L) i kondenzatora (C) antirezonansa nastupa kada je :

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$$

Popravka faktora snage cos φ *u kolu potrošača impedanse* $\overline{Z} = R + j\omega L$ *vrši se paralelnim vezivanjem kondenzatora C.*

U trofaznom sistemu trenutne vrednosti napona su:

$u_1 = U_m \cos\omega t \;,\; u_2 = U_m \cos\left(\omega t - \frac{2}{3}\pi\right)$ *i* $u_3 = U_m \cos\left(\omega t + \frac{2}{3}\pi\right)$.

Kompleksni predstavnici trofaznih napona su:

$\overline{U}_1 = U_m \;,\; \overline{U}_2 = U_m e^{-j\frac{2}{3}\pi}$ *i* $\overline{U}_3 = U_m e^{j\frac{2}{3}\pi}$.

U simetričnom trofaznom sistemu odnos linijskih napona U_l *i struja* I_l *faznih napona* U_f *i struja* I_f *pri sprezi u trougao je* $U_l=U_f$, $I_l=\sqrt{3}\, I_f$ *, a u zvezdu je* $U_l=\sqrt{3}\, U_f$, $I_l=I_f$.

Aktivna snaga simetričnog trofaznog sistema je :

$P = \sqrt{3} \cdot U_l I_l \cos\varphi$

a reaktivna snaga :

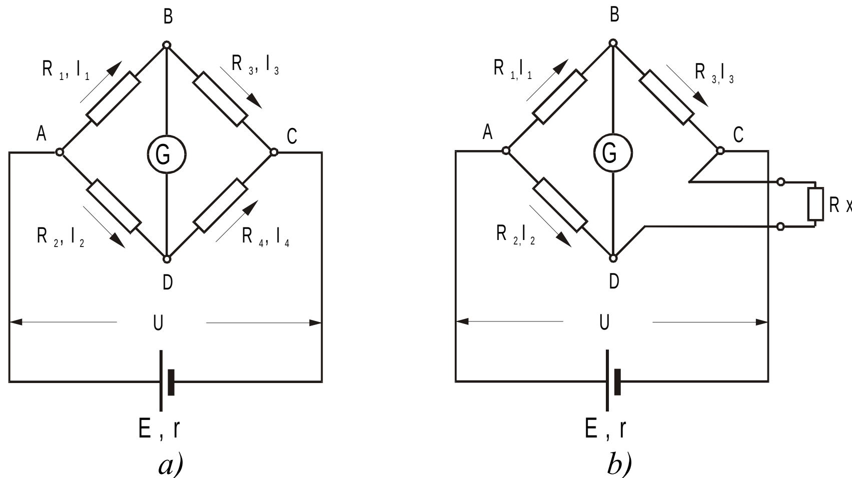
$Q = \sqrt{3} \cdot U_l I_l \sin\varphi$

Kod obrtnog polja trofaznog sistema intenzitet vektora magnetne indukcije je :

$B = \frac{3}{2} B_m$

a pravac vektora je u funkciji vremena određen sa $\alpha = \omega \cdot t$

***Wheatston-ov most**: se koristi za merenje otpornosti (otpornici, otporni pretvarači neelektričnih veličina u električne i sl.). Pomoću njega se mogu vršiti veoma precizna merenja iako je njegova konstrukcija veoma jednostavna (sl.1)*



sl.1

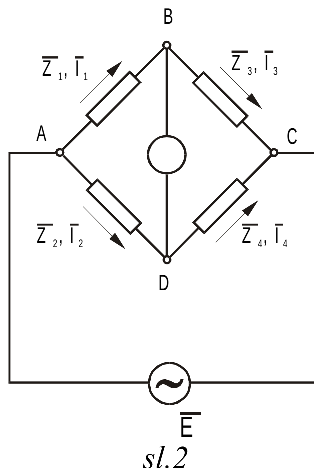
Uslov koji moraju zadovoljiti vrednosti otpornosti R_1-R_4 (odn. odnos njihovih vrednosti R_1-R_4) da bi most bio u ravnoteži:

$$R_1 R_4 = R_2 R_3 \qquad \text{... (1)}$$

$$R_1 R_x = R_2 R_3 \Rightarrow R_x = \frac{R_2 R_3}{R_1} \qquad \text{... (2)}$$

- *merenje se vrši kada je most u ravnoteži i kad kroz indikator ne protiče struja tako da on ne utiče na ishod merenja*
- *u jednačini (2) ne figuriše napon za napajanje (U) kao i otpornosti priključnih vodova tako da male promene njihovih vrednosti ne utiču na ishod merenja*
- *Vitstonov most je u ravnoteži kada su proizvodi otpornosti u suprotnim granama kola međusobno jednaki*

Mostovi za naizmeničnu struju *se koriste za merenje induktivnosti., kapacitivnosti, impedanse i učestanosti.*



sl.2

Uslov ravnoteže impedansi je:

$$\overline{Z}_1 \overline{Z}_4 = \overline{Z}_2 \overline{Z}_3 \qquad \text{...(3)}$$

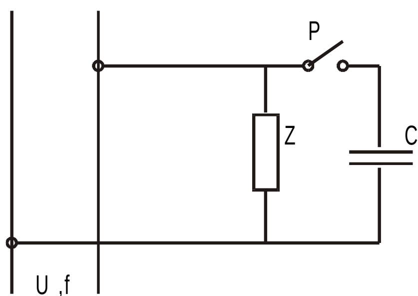
a kako je $\overline{Z}_i = \overline{Z} = Z_i e^{\iota\varphi}$ *to se uslov ravnoteže može napisati u obliku sistema jednačina:*

$$Z_1 Z_4 = Z_2 Z_3$$
$$\varphi_1 + \varphi_4 = \varphi_2 + \varphi_3 \qquad (4)$$

S obzirom na vrstu impedanse razlikuju se Maxwell-ov, Desotijev, Vinov i sl. mostovi.

4.1 Potrošač impedanse $\overline{Z} = 12.5 + j12(\Omega)$ priključen je preko bakarnog dvožičnog voda prečnika d=4mm $\rho = 1{,}75 \cdot 10^{-8}\,\Omega m$, a na rastojanju L=180m od izvora U=220V, f=50Hz. Odrediti za koliko će se promeniti snaga toplotnih gubitaka u napojnom vodu posle priključivanja kondenzatora kapaciteta C=150μF paralelno potrošaču zatvaranjem prekidača P. Induktivnost voda R_v zanemariti.

REŠENJE:



Otpornost voda za napajanje je:

$$R_V = \rho \frac{2L}{\frac{\pi}{4} d^2} = 1.75 \cdot 10^{-8} \cdot \frac{2 \cdot 180 \cdot 4}{3.14 \cdot 4^2 \cdot 10^{-6}} =$$
$$= 0.5\Omega$$

2L – jer se vod sastoji od dva provodnika

Kada kondenzator nije priključen ukupna impedansa je:

$\overline{Z} = R_V + R + jX_L = (13 + j12)\Omega$, a moduo impedanse iznosi:

$$Z = \sqrt{13^2 + 12^2} = 17.7\Omega$$

Faktor snage je: $\cos\varphi_1 = \dfrac{R + R_V}{Z} = 0.735$

Efektivna vrednost struje u vodu za napajanje je: $I_1 = \dfrac{U}{Z} = \dfrac{220}{17.7} = 12.43A$

Snaga gubitaka u vodu za napajanje je: $P_1 = R_V I^2 = 0.5 \cdot 12 \cdot 43^2 = 77.24W$

Impedansa kondenzatora je: $\overline{Z_C} = -\dfrac{j1}{\omega C} = -j\,21.2\,\Omega$

Ukupna impedansa potrošača posle priključenja kondenzatora je:

$$\overline{Z_e} = R_V + \frac{\overline{Z} \cdot \overline{Z_C}}{\overline{Z} + \overline{Z_C}} = 23.3 - j4\Omega$$

$Z = \sqrt{23.3^2 + 4^2} = 23.65\Omega$

$cos\varphi_2 = \frac{23.3}{23.65} = 0.985$

Struja u vodu za napajanje posle zatvaranja prekidača je:

$I_2 = \frac{U}{Z_e} = \frac{220}{23.3 - j4} = 9.16 + j1.57(A)$

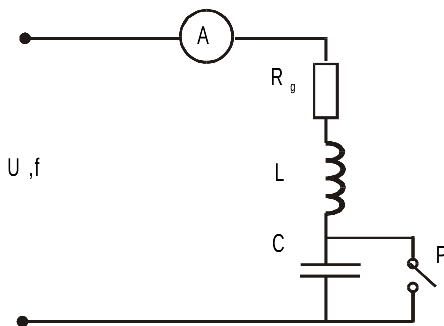
$I_2 = 9.3(A)$

Snaga gubitaka na vodu posle zatvaranja prekidača je:

$P_2 = R_V I_2^2 = 0.5 \cdot 86.4 = 43.2W$

$P_1 - P_2 = 34W$

4.2 U kolu prikazanom na slici poznato je: $u = 120\cos 314t$, $R = 10\Omega$ i $L = 63.7mH$. Odrediti kapacitet kondenzatora C tako da pokazivanje ampermetra A bude jednako pri otvorenom i pri zatvorenom prekidaču P. Pri kojoj će učestanosti kod otvorenog prekidača pokazivanje ampermetra biti najveće?



REŠENJE: Efektivna vrednost struje kroz kolo pre uključivanja prekidača iznosi:

$$I_1 = \frac{U}{Z_1} = \frac{U}{\sqrt{R^2 + (X_L - X_C)^2}}$$

a posle zatvaranja prekidača :

$$I_2 = \frac{U}{Z_2} = \frac{U}{\sqrt{R^2 + X_L^2}}$$

iz uslova jednakosti struja pre i posle zatvaranja prekidača sledi :

$$I_1 = I_2$$

$$\frac{U}{\sqrt{R^2 + (X_L - X_C)^2}} = \frac{U}{\sqrt{R^2 + X_L^2}}$$

$$X_L - X_C = X_C$$

pa je $X_C=2X_L$

Kako je $X_L = \omega L$

$X_L = 314 \cdot 6,37 \cdot 10^{-3} = 20\Omega$ to je $X_C = 40\Omega$

Kapacitet kondenzatora je $C = \dfrac{1}{\omega X_C} = \dfrac{1}{314 \cdot 40} = 79{,}6\ \mu\mathrm{F}$

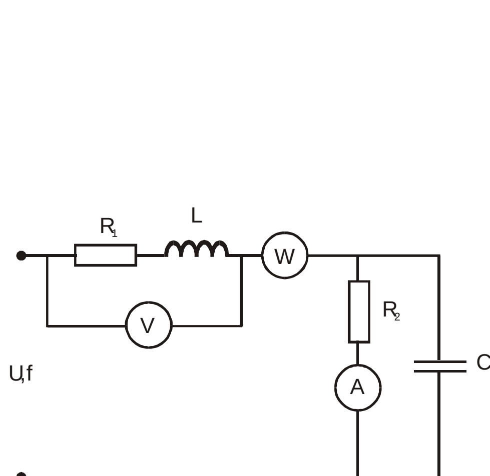
Ako se učestanost f izvora menja pokazivanje ampermetra će biti najveće pri naponskoj rezonansi kada je X_L=X_C jer je tada Z najmanje. Na osnovu toga je

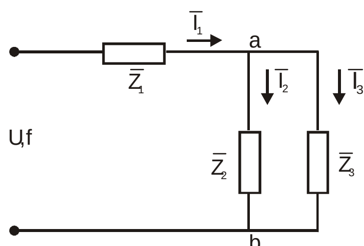
$$\frac{1}{\omega C} = \omega L$$

$$\omega^2 = \frac{1}{LC}$$

$$\omega = \frac{1}{\sqrt{LC}}$$

$$f = \frac{\omega}{2\pi} = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}} = 70{,}7\,Hz$$





4.3 Odrediti pokazivanje mernih instrumenata uključenih u kolo prikazano na slici. Dato je $u(t) = 100\sqrt{2}\cos 1000 \cdot t\ (V)$ $R_1 = 60\Omega$, $R_2 = 100\Omega$, $L = 0.1H$ i $C = 20\mu F$. Pretpostaviti da su instrumenti idealni.

REŠENJE:

Pri određivanju pokazivanja instrumenata koristićemo ekvivalentno kolo prikazano na slici pod b). Reaktanse su X_L=1000· 0,1 =100 Ω i $X_C = \dfrac{1}{\omega C} = 50\,\Omega$, a impedanse i napon :

$$\overline{Z}_1 = R_1 + j\omega L = (60 + j100)\,\Omega,\ \overline{Z}_2 = R_2 = 100\,\Omega,\ \overline{Z}_3 = -\frac{1}{\omega C} = -j50\,\Omega,$$

$$\overline{U} = U \cdot e^{j\varphi} = 100\sqrt{2}\ \mathrm{V}$$

Ukupna impedansa kola je

$$\overline{Z} = \overline{Z}_1 + \frac{\overline{Z}_2\overline{Z}_3}{\overline{Z}_2 + \overline{Z}_2} = 60 + j100 + \frac{100(-j50)}{100 - j50}$$

a struja kroz kolo je :

$$\bar{I} = \frac{U}{\overline{Z}_1 + \dfrac{\overline{Z}_2\overline{Z}_3}{\overline{Z}_2 + \overline{Z}_3}} = (1{,}13 - j0{,}85)$$

Dalje je : $\overline{U}_{ab} = \dfrac{\overline{Z}_2\overline{Z}_3}{\overline{Z}_2 + \overline{Z}_3}\bar{I} = (-11{,}3 - j62{,}2)\ \text{V}$

.Napon na voltmetru je

$\overline{U}_1 = \overline{U} - \overline{U}_{ab} = 130 - j62{,}2\ (\text{V})$.

Struje I_2 i I_3 se nalaze na osnovu :

$\bar{I}_2 = \dfrac{\overline{U}_{ab}}{\overline{Z}_2} = (-0{,}113 - j0{,}62)\ \text{A}, \quad \bar{I}_3 = \bar{I} - \bar{I}_2 = (1{,}24 - j0{,}23)\ \text{A}$.

Instrumenti pokazuju efektivne vrednosti, a njihova pokazivanja su:

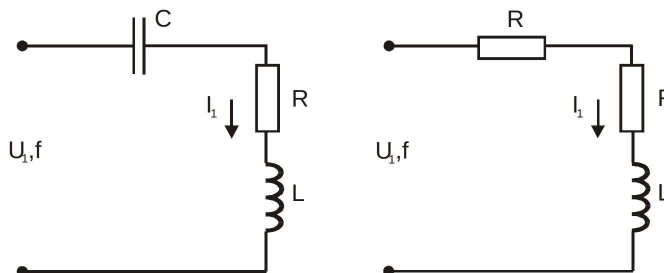
$I_a = \dfrac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{1{,}13^2 + 0{,}85^2} = 0{,}45\ \text{A}\ , \quad U_v = \dfrac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{130^2 + 62{,}2^2} = 101{,}9\ \text{V}.$

Vatmetar meri aktivnu snagu na delu a-b kola.Ova snaga se dobija iz kompleksne snage kao :

$$P_w = \text{Re}\left[\overline{S}\right] = \text{Re}\left[\frac{1}{2}\overline{U}_{ab}\overline{\overline{I}}\right] = \text{Re}\left[\frac{1}{2}(-11{,}3 - j62{,}2)\cdot(1{,}13 + j0{,}85)\right] = 20\ \text{W}$$

gde je $\overline{\overline{I}} = (1{,}13 + j0{,}85)$ konjugovano kompleksna vrednost struje .Na osnovu izračunatih kompleksnih vrednosti mogu se nacrtati potpuni fazorski dijagrami napona i struja.

4.4 Motor naizmenične struje čiji je nominalni napon U=36V, f=50Hz pri faktoru snage $\cos\varphi = 0.7$ ima potrošnju P_m=10W. Da bi se priključio na veći, mrežni napon U=220V, f=50Hz redno motoru se vezuje kondenzator kapaciteta C ili otpornik R. Izračunati potrebne vrednosti kapaciteta C, otpornosti R kao i faktora snage i aktivne snage u oba slučaja.



REŠENJE: Motor se može smatrati kao potrošač impedanse $\overline{Z} = R_m + jX_L$. Parametri impedanse se određuju na osnovu nominalnih podataka za motor :

$P_m = U_1 I_m \cos\varphi = 10 \text{ W}$, $I_1 = \dfrac{P_m}{U_1 \cos\varphi} = 0{,}397 \text{ A}$

Impedansa Z je prema tome :

$$Z = \sqrt{R_m^2 + X_L^2} = \frac{U_1}{I_1} = 90{,}72 \ \Omega$$

a faktor snage $\cos\varphi = \dfrac{R_m}{Z}$

odakle je $R_m = Z\cos\varphi = 90{,}72 \cdot 0{,}7 = 63{,}5 \ \Omega$

Reaktansa X_L je tada $X_L = \sqrt{Z^2 - R_m^2} = 64{,}8 \ \Omega$, $X_L \approx 65\Omega$

Pri priključivanju na mrežni napon sa kondenzatorom C redno vezanim motoru struja kroz kolo treba da ima vrednost I_1=0,397 A .Ukupna impedansa kola u tom slučaju je

$$Z_1 = \frac{U}{I_1} = \frac{220}{0{,}379} = 554\,\Omega$$

$$Z_1 = \sqrt{R_m^2 + \left(X_L - X_C\right)^2}$$

odakle je $X_C = \sqrt{Z^2 - R_m^2} + X_L^2 = 615{,}3 \ \Omega$

a kapacitet kondenzatora C je

$$C = \frac{1}{\omega X_C} = \frac{1}{2 \cdot 3{,}14 \cdot 615{,}3 \cdot 50} = 5{,}17 \cdot 10^{-6} \text{ F} = 5{,}17 \ \mu\text{F}$$

Kod redne veze motora sa otpornikom R kao i kod veza sa kondenzatorom C struja kroz motor treba da ima vrednost I_1=0,397 A (da bi aktivna snaga $P_m = R_m I_1^2$ motora imala istu vrednost kao i u slučaju kada je priključen na 36V).Ukupna impedansa motora i redno vezanog otpora je

$$Z = \frac{U}{I_1} = 554\,\Omega$$

Kako je u ovom slučaju impedansa $Z = \left(R_m + R\right)^2 + X_L^2$, sledi :

$$R = \sqrt{Z^2 - X_L^2} - R_m = 487\,\Omega \ .$$

Pri vezivanju kondenzatora faktor snage je :

$$tan\,\varphi_1 = \frac{X_L - X_C}{R_m} = \frac{64{,}8 - 615}{63{,}5} = -8{,}66 \ , \ \cos\varphi_1 = 0{,}115$$

a ukupna aktivna snaga $P_1 = U \cdot I_1 \cos\varphi_1 = 220 \cdot 0{,}379 \cdot 0{,}115 = 10 \text{ W}$

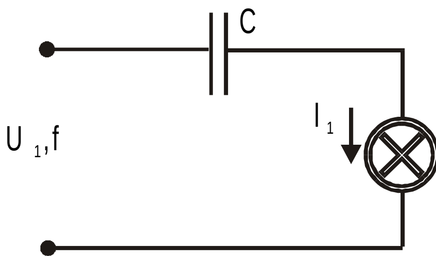
Pri vezivanju otpornika R faktor snage je :

$$\tan\varphi_2 = \frac{X_L}{R + R_m} = \frac{65}{487 + 63{,}5} = 0{,}118 \ , \ \cos\varphi_2 = 0{,}993$$

a ukupna aktivna snaga $P_2 = U \cdot I_1 \cos\varphi_2 = 220 \cdot 0{,}397 \cdot 0{,}993 = 86{,}7 \text{ W}$

Na osnovu prethodnih rezultata može se zaključiti da se pri obezbeđenju normalnih uslova rada motora pri korišćenju otpornika potrošnja povećava 8,67 puta u odnosu na korišćenje kondenzatora.
Pogoršanje vrednosti faktora snage pri vezivanju kondenzatora,s obzorom na malu vrednost struje lako se kompenzira drugim potrošačem koji se skoro uvek vezuje na mrežu 220 V ,a koji su uglavnom induktivnog karaktera.

4.5 Sijalica sa užarenom niti snage P=60W predviđena je za priključivanje na napon $U = 110V, f = 50Hz$. Izračunati kapacitet kondenzatora C koji treba redno vezati sa sijalicom pri priključivanju na mrežu U_1=220V, f=50Hz.



REŠENJE:

Pri napajanju naponom U=110V struja ima vrednost

$$I = \frac{P}{U} = \frac{6}{11} A$$

Otpornost sijalice je :

$$R = P/I^2 = 201.7\Omega$$

Kada se sijalica redno vezana sa kondenzatorom, priključi na napon U_1, impedansa potrošača je:

$$Z^2 = R^2 + X_C^2$$

Snaga potrošača $P = RI^2$ treba da ostane ista odnosno treba da važi da je $I = I_1$.
Kako je:

$$I = \frac{U}{R}$$

$$I_1 = \frac{U_1}{\sqrt{R^2 + X_C^2}}$$

$$\frac{U}{R} = \frac{U_1}{\sqrt{R^2 + X_C^2}}$$

Odatle je:

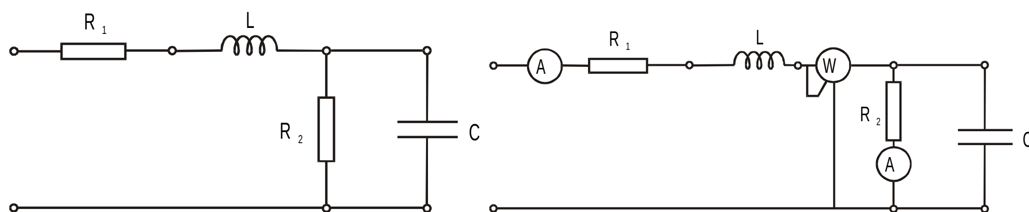
$$X_C = \sqrt{\left(\frac{U_1}{U}R\right)^2 - R^2} = R\sqrt{3} = 350\Omega$$

$$C = \frac{1}{\varpi X_C} = 9.1\mu F$$

4.6 Otpornik R=150Ω, kalem induktivnosti L=1.2H i kondenzator C=16μF vezani su redno i priključeni na napon U=60V, 50Hz. Izračunati struju kroz kolo

i napone na otporniku, kalemu i kondenzatoru. Odrediti kapacitivnost C_1 i način njegovog vezivanja da bi u kolu nastala naponska rezonansa.
REŠENJE: $I=0.258\ A$, $U_R=39\ V$, $U_L=97.2\ V$, $U_C=51.342\ V$, $\varphi = 49{,}7^o$, $C_1=18\ \mu F$ se vezuje na red sa C.

4.7 Kolo čija je šema data na slici priključeno je na napon $u(t)=100\sqrt{2}\cos 1000t$, a parametri kola su R_1=60Ω, R_2=100Ω, L=0.1H i C=20μF. Odrediti struje i napone u kolu. Koliko je pokazivanje mernih instrumenata vezanih u kolo prema slici.



REŠENJE: Vidi zadatak 4.3.

4.8 Kada je kalem otpora R i induktivnosti L stalno priključen na jednosmerni napon $U_- = 6V$ kroz njega protiče struja $I_- = 0.5A$. Ako se isti kalem stalno priključi na naizmenični napon $U_{ef} = 12V, f = 50Hz$ jačina struje je $I_{ef} = 0.6A$. Odrediti:
a) otpor R i induktivnost L kalema
b) kapacitet kondenzatora C koji treba priključiti kalemu da bi u kolu nastupila naponska rezonansa
REŠENJE: $R=12\,\Omega$, $L=50.9mH$, $C=199\ \mu F$

4.9 Potrošač snage P=2,4kW priključen je na napon U=220V, f=50Hz. Izmerena jačina struje kroz potrošač je I=16.7A. Odrediti impedansu potrošača $\overline{Z} = R + j\varpi L$ (R i L).
REŠENJE: $R=8.95\,\Omega$, $L=33mH$

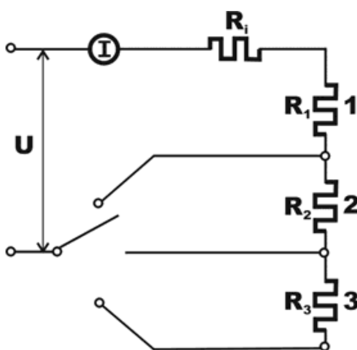
4.10 Dva grejača otpora R_1=6Ω i R_2=8Ω spojena su paralelno i preko kalema induktivnosti L=6mH, zanemarljivog otpora i priključena na napon U=220V, f=50Hz. Odrediti napon na grejačima i na kalemu i jačine struja kroz grejače. Nacrtati fazorske dijagrame.
REŠENJE: $Ugr=168 - j\,94\ V$, $U_L=92 - j52\ V$, $I_{G1}=28 - j\,15.7\ A$, $I_{G2}= 21 - j\,11.8\ A$

4.11 Kroz kalem otpornosti r=100Ω i induktivnosti L=1H protiče struja I=50mA i učestanosti f=50Hz. Napisati izraz za trenutne vrednosti napona koji je priključen na izvode kalema. Koliku bi vrednost pokazivao voltmetar kada se priključi na izvode kalema?
REŠENJE: $u(t)= 165\sin(314t)$, $U_{eff}=117V$

4.12 Kada se na izvode kalema priključi jednosmerni napon U=10V kroz njega teče struja I=200mA. Kada se na isti kalem priključi naizmenični napon U=45.8V, f=50Hz struja je I =165mA. Izračunati otpor i induktivnost kalema, kao i cosφ. REŠENJE: *R=50Ω, L=0.864H, cos φ =0.181*

4.13 Kada se kalem nepoznatog otpora r i induktivnosti L priključi na napon U=200V, 50Hz struja kroz njega je I=2.5A, a $\varphi=76^O$. Odredi otpor r i induktivnost L.
REŠENJE: *R=19.4Ω, L=247mH*

4.14 Kazaljka mernog instrumenta unutrašjeg otpora R_i=500 Ω skrene do zadnje podele pri struji I=0,5 mA. Odrediti vrednosti otpornosti R_1,R_2 i R_3 da bi se merni instrument koristio kao voltmetar za merenje napona u opsezima 6V(1), 25V(2) i 60V(3). Šema veze mernog instrumenta, preklopnika P i otpornika data je na slici.



REŠENJE:

Proširenje mernog opsega instrumenta pri merenju napona vrši se rednim vezivanjem dodatnog otpora unutrašnjoj otpornosti mernog instrumenta. Pri zadatoj jačini struje I=0,5 mA i unutrašnjoj otpornosti R_i=500 Ω napon na izvodima mernog instrumenta je:

$U_v = R_i I = 500 \cdot 0{,}5 \cdot 10^{-3} = 0{,}25$ V .

Da bi se merni opseg instrumenta proširio n-puta potrebno je redno vezati otpornost R tako da bude ispunjen uslov:

$\left(n_1 - 1\right) R_v = R$.

U položaju 1 preklopnika ovaj odnos je:

$n_1 = \dfrac{6}{0{,}25} = 24$ i uslov $\left(n_1 - 1\right) R_i = R_1$.

U položaju 2 preklopnika:

$n_2 = \dfrac{25}{0{,}25} = 100$ i $\left(n_2 - 1\right) R_i = R_1 + R_2$.

U položaju 3 preklopnika je:

$$n_3 = \frac{60}{0,25} = 240 \text{ I } \left(n_3 - 1\right)R_i = R_1 + R_2 + R_3 \quad .$$

Na osnovu prethodne tri jednačine dobijaju se vrednosti:

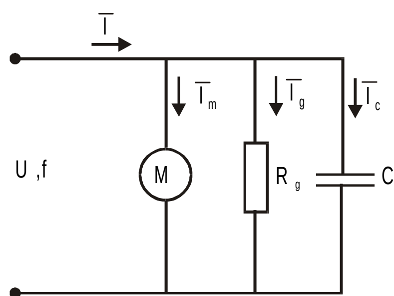
$$R_1 = \left(n_1 - 1\right)R_i = 23 \cdot 500 = 11{,}5\text{k}\Omega \,,$$

$$R_2 = \left(n_2 - 1\right)R_i - R_1 = 49500 - 11500 = 38\text{k}\Omega \,,$$

$$R_3 = \left(n_3 - 1\right)R_i - \left(R_1 + R_2\right) = 11950 - 49500 = 70\text{k}\Omega \,.$$

4.15 Na mrežu 220V,50 Hz priključen je motor snage P=2kW faktora snage cosφ=0,745 i grejač snage P_g=1,54 kW. Odrediti kapacitet kondenzatora koji treba priključiti paralelno potrošačima da bi ukupan faktor snage bio cosφ =1. Nacrtati fazorski dijagram struja u kolu posle vezivanja kondenzatora.

REŠENJE: Struja kroz grejač je u fazi sa naponom i ima samo aktivnu komponentu koja iznosi :



$$I_g = \frac{P_g}{U} = \frac{1540}{220} = 7 \text{ A}$$

pa je kompleksna struja grejača :

$$\bar{I}_g = 7 + j0 \text{ (A)}$$

Impedansa motora se može predstaviti rednom vezom otpornosti i induktivnosti, pa je struja kroz motor:

$$I_m = \frac{P}{U \cdot \cos\varphi} = \frac{2000}{220 \cdot 0{,}745} = 12{,}2\text{A}$$

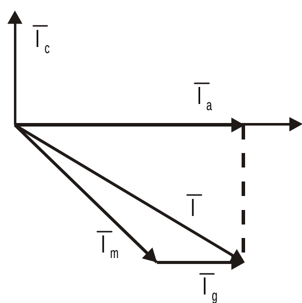
kasni u odnosu na priključeni napon za ugao čiji je kosinus dat kao :

$$\varphi = \arccos\varphi = 46° \; 29' \,.$$

Aktivna komponenta struje kroz motor koja je u fazi sa priključenim naponom je :

$$I_a = I_m \cos\varphi = 12{,}2 \cdot 0{,}745 = 9{,}089 \text{ A} \,.$$

Reaktivna komponenta struje koja u odnosu na napon kasni za $\pi/2$ iznosi :



$$I_r = I_m \sin\varphi = I_m \sqrt{1 - \cos^2\varphi} =$$

$$= 12{,}2 \cdot 0{,}667 = 8{,}1A$$

Kompleksna struja motora je :

$$\bar{I}_m = I_a + jI_r = 9 + j8{,}1 \text{ (A)}$$

a ukupna struja koju motor i grejač povlače iz mreže je :

$$\bar{I} = I_m + I_g = \left(9 + j8{,}1\right) + \left(7 + j0\right) = 16 + j8{,}1 \text{ (A)}$$

Fazorski dijagram struja motora i grejača sa mrežnim naponom na faznoj osi prikazan je na slici .
Struja kroz kondenzator koji se priključuje paralelno motoru i grejaču prednjači u odnosu na napon za π/2 kao što je prikazano na fazorskom dijagramu.

Da bi ukupna struja sa priključenim kondenzatorom bila u fazi sa naponom, na osnovu fazorskog dijagrama se može zaključiti da će taj uslov biti ispunjen ukoliko je struja kondenzatora I_c jednaka reaktivnoj komponenti ukupne struja I_r motora i grejača :

$$I_c = I \sin\varphi$$

a kako je struja kondenzatora

$$I_c = \frac{U}{X_c} = U 2\pi f C$$

to na osnovu prethodnih jednačina nalazimo da je kapacitivnost kondenzatora C :

$$I_c = \frac{I_r}{\omega U} = \frac{I_r}{2\pi f U} = 117{,}25 \ \mu\text{F}$$

4.16 Prema brojnim podacima za motor koji su dati u prethodnom zadatku, odrediti ekvivalentnu impedansu kojom motor može biti prikazan.

REŠENJE: Ako je struja motora $I = \dfrac{P}{U \cos\varphi} = 12{,}2$ A , onda je moduo impedanse

:

$$Z = \frac{U}{I} = \frac{220}{12{,}2} = 18\ \Omega$$

a argument : φ =arc cos φ =46° 29' .

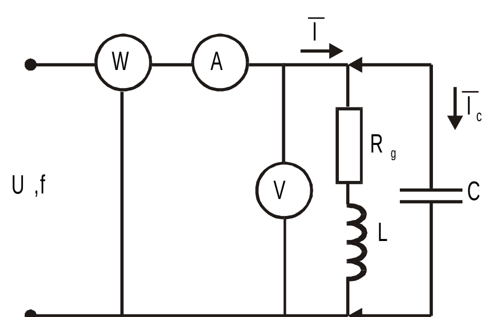
Impedansa u kompleksnom obliku je:

$$\overline{Z} = Z\cos\varphi + jZ\sin\varphi = R + jX_L \quad (\Omega)$$

Kako je: Z cos φ=13,43 Ω, a Z sinφ =12 Ω, to je $\overline{Z}$ =13,43+j 12 (Ω)
Kako je X_L = ω L=2πf·L , to je L=X_L /2πf=38,2 mH.
Impedansa motora ima otpornost R=13,43 Ω i induktivnost L=38,2 mH .

4.17 Pokazivanje mernih instrumenata u kolu na slici je: U=220V, I=10,5A, P=1,2kW. Odrediti parametre R i L kola i kapacitet kondenzatora koji treba vezati paralelno impedansi Z da bi se faktor snage popravio na cosφ=0,93. Ako se napon U ne menja, odrediti pokazivanja instrumenata posle vezivanja kondenzatora C. Kolo se napaja iz mreže učestanosti f=50 Hz .

REŠENJE: Faktor snage potrošača izračunava se na osnovu vrednosti napona, struje i snage prema:



$$\cos\varphi = \frac{1200}{220 \cdot 10{,}5} = 0{,}52$$

a impedansa potrošača je :

$$Z = \frac{U}{I} = \frac{220}{10{,}5} = 20{,}96 = 21\,\Omega$$

Aktivna otpornost je : $R = Z\cos\varphi_1 = 10{,}9\,\Omega$,
a reaktivna : $X_L = Z\sin\varphi_1 = 17{,}94 = 18\ \Omega$
Impedansa potrošača u kompleksnom obliku je :
$\overline{Z} = 11 + j18\ (\Omega)$.
Struja kroz potrošač u kompleksnom obliku je :

$$\overline{I}_1 = \frac{\overline{U}}{\overline{Z}} = \frac{220}{11 + j18} = 5{,}5 - j9\ \text{(A)}$$

Posle paralelnog vezivanja kroz kondenzator protiče samo reaktivna komponenta struje :
$I_c = U\omega C$
aktivna komponenta struje zbog toga ostaje ista pa važi

$$I_1\cos\varphi_1 = I_2\cos\varphi_2 \quad \text{odakle je } I_2 = \frac{\cos\varphi_1}{\cos\varphi_2} I_1 = 5{,}87\ \text{A}$$

a to je i pokazivanje ampermetra posle vezivanja kondenzatora C . Kapacitet kondenzatora se određuje na osnovu:

$$I_c = I_1\sin\varphi_1 - I_2\sin\varphi_2 = U\omega C \quad ,$$

odakle je :

$$C = \frac{I_1\sin\varphi_1 - I_2\sin\varphi_2}{U\omega} = 98\ \mu\text{F} .$$

Pokazivanje vatmetra ostaje nepromenjeno.

4.18 Transformator sa N_1=480 zavojaka primara čiji je otpor R=0,25Ω priključen je na napon U=220V,50Hz. U praznom hodu izmerena je struja I_o=0,36A i snaga P=37W. Odrediti gubitke u jezgru transformatora i magnetni fluks.

REŠENJE: U režimu praznog hoda aktivna snaga jednaka je zbiru snage za zagrevanje provodnika primara i snage gubitaka u jezgru (histerezisni gubici i gubici usled vihornih struja):

$$P = P_j + P_{Fe}\ \text{, odakle}\ P_{Fe} = P_o - P_{Cu} = P_o - RI_o^2 = 37 - 0{,}25 \cdot 0{,}36^2 = 36{,}97\text{W} .$$

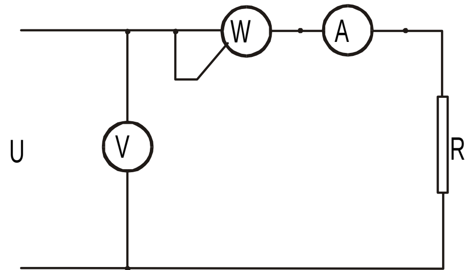
Faktor snage praznog hoda je: $\cos\varphi_o = \dfrac{P}{U \cdot I} = \dfrac{37}{220 \cdot 0{,}36} = 0{,}467$.

Indukovana elektromotorna sila u namotajima primara je:

$$E_1 = 4{,}44 f N_1 \Phi_m \approx U_1$$

a amplituda magnetnog fluksa kroz jezgro transformatora je:

$$\Phi_m = \frac{U_1}{4{,}44 f \cdot N_1} = \frac{220}{4{,}44 \cdot 50 \cdot 480} = 2{,}06\text{m Wb}$$



4.19 U kolu čija je šema data na slici merni instrumenti pokazuju U=220V, I=32A i P=4,5kW. Odrediti kapacitet kondenzatora koji treba vezati paralelno potrošaču da bi se pokazivanje ampermetra smanjilo za 8 A, a pokazivanja voltmetra i vatmetra ostanu nepromenjena.

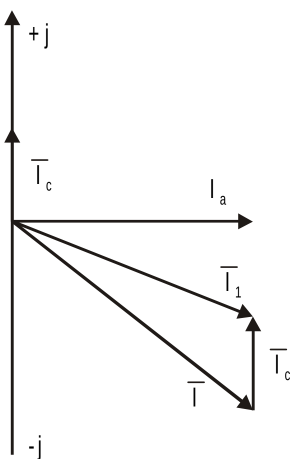
REŠENJE: Faktor snage pre vezivanja kondenzatora je :

$$\cos\varphi = \frac{P}{UI} = \frac{4500}{220 \cdot 32} 0{,}64$$

a posle vezivanja kondenzatora :

$$\cos\varphi_1 = \frac{P}{U(I-8)} = \frac{4500}{220 \cdot 24} 0{,}85$$

Sa fazorskog dijagrama za struje koji je prikazan na osnovu projekcija struja na imaginarnu osu sledi :



$$I \sin\varphi = I_1 \sin\varphi + I_c \text{ , odakle je}$$

$$I_c = I \sin\varphi - I_1 \sin\varphi_1 = \frac{U}{\frac{1}{\omega C}}$$

pa je kapacitet kondenzatora C :

$$C = \frac{I \sin\varphi - I_1 \sin\varphi_1}{\omega U}$$

Kako je:

$$\sin\varphi = \sqrt{1 - \cos^2\varphi} = 0{,}77$$

$$\sin\varphi_1 = \sqrt{1 - \cos^2\varphi_1} = 0{,}53$$

posle zamene brojnih vrednosti dobija se :

C=172,5 μF .

4.20 Primar transformatora ima N_1=300, a sekundar N_2=80 zavojaka. Ako kroz sekundar protiče struja I=5A odrediti struju kroz primar.
REŠENJE: *Ip=1.33A*

4.21 Snaga primara transformatora je P_1=5kW. Struja opterećenja (u sekundaru) je I_2=50A, a faktor snage je $\cos\varphi = 0.9$. Ako je stepen korisnog dejstva $\eta = 0.94$ odrediti napon na sekundaru.
REŠENJE: U_2=104V

4.22 Generator jednosmerne struje sa paralelnom pobudom pokreće se motorom sa unutrašnjim sagorevanjem i daje mreži napona U=440V snagu P=150kW pri brzini n_g=900 ob/min. Ako se prekine mehanička veza motora za pokretanje i mašine jednosmerne struje, generator produži da rotira kao motor pri čemu uzima iz mreže snagu P_2=15kW. Odrediti brzinu kojom mašina jednosmerne struje rotira kao i brzinu idealnog praznog hoda. Otpor namotaja indukta je R_r=0,2Ω, a induktora R_p=100 Ω .

REŠENJE: Kada mašina radi kao generator struja kroz kolo indukta nalazi se na osnovu:

$$I_r = I + I_p = \frac{P}{U} + \frac{U}{R_p} = \frac{150 \cdot 10^3}{440} + \frac{440}{100} = 345\text{A} \ .$$

Indukovana elektromotorna sila u namotaju indukta je:

$$E_g = U + R_r I_r = 440 + 0{,}2 \cdot 345 = 509$$

pa je iz relacije:

$$E_g = cn_g\Phi \quad , \quad c\Phi = \frac{E_g}{n_g} = 0{,}565$$

Kada se prekine mehanička veza mašine i pogonskog motora, mašina ostaje priključena na mrežu i radi kao motor. Struja koju povlači iz mreže je:

$$I = \frac{P_2}{U} = I_r + I_p = I_r + \frac{U}{R_p}$$

Posle zamene se dobija: $I_r = I - I_p = \frac{P_2}{U} - \frac{U}{R_p} = 29{,}7\text{A}$.

Indukovana kontraelektromotorna sila je:

$$E_m = U - R_r I_r = 440 - 0{,}2 \cdot 29{,}7 = 434\text{V} \ .$$

Kako je:

$E_m = cn_m\Phi$, to je $n_m = \frac{E_m}{c\Phi} = \frac{434}{0{,}565} = 768$ ob/min .

Pri idealnom praznom hodu struja u kolu rotora teži "0", pa je:

$E_{mo} = U - R_r I_{ro} \approx U = cn_o\Phi = 440\text{V}$.

Iz odnosa:

$\dfrac{E_{mo}}{E_m} = \dfrac{cn_o\Phi}{cn_m\Phi}$, nalazi se $n_o = n_m \dfrac{E_{mo}}{E_m} = 778{,}6$ ob/min .

4.23 Motor jednosmerne struje sa paralelnom pobudom ima na natpisnoj ploči sledeće podatke: I=30A, U=220V, n=2000 ob/min. Ako je otpor rotorskog namotaja R_r=0,5Ω, a pobudnog R_p=110Ω, izračunati brzinu u praznom hodu. Reakciju indukta i pad napona na četkicama zanemariti .

REŠENJE: Pri nominalnim uslovima rada struja rotora je:

$$I_r = I - \frac{U}{R_p} = 28\text{A} .$$

Indukovana kontraelektromotorna sila je:

$E_n = c\Phi n = U - R_r I_r = 206\text{V}$.

U praznom hodu indukovana kontraelektromotorna sila je:

$E_o = c\Phi n_o$, U=220V .

Na osnovu toga je:

$$\frac{E_o}{E_n} = \frac{c\Phi n_o}{c\Phi n} = \frac{U}{U - R_r I_r} = \frac{220}{206} .$$

Brzina u praznom hodu je:

$$n_o = n\frac{E_o}{E} = 2000\frac{220}{206} = 2136 \text{ ob/min} .$$

4.24 Motor jednosmerne struje sa rednom pobudom (R_p+R_r=1,2Ω) pri naponu U=200V i struji I=15A rotira brzinom n_1=1000 ob/min. Izračunati promenu brzine pri rednom vezivanju otpora R_d=3,8 Ω, ako se opterećenje motora ne menja, a pad napona na četkicama zanemari .

REŠENJE: U stacionarnim uslovima rada je M_p=M_o=M , $\left(J\dfrac{dn}{dt} = 0 \right)$.

Kada otpornik R_d nije vezan važi $M_1 = kI_1^2$, $E_1 = U - \left(R_p + R_r\right)I_1$.

Posle vezivanja otpornika je $M_2 = kI_2^2$, $E_2 = U - \left(R_d + R_r + R_p\right)I_2$.

Iz uslova da je M_1=M_2 dobija se da je I_1=I_2 , a iz odnosa indukovanih kontraelektromotornih sila:

$$\frac{E_2}{E_1} = \frac{U - \left(R_d + R_r + R_p\right)I_2}{U - \left(R_r + R_p\right)I_1} = \frac{c\Phi n_2}{c\Phi n_1} .$$

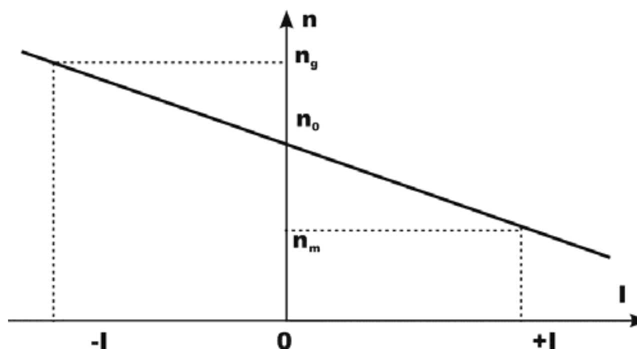
Odatle je: $n_2 = n_1 \dfrac{U-\left(R_d + R_r + R_p\right)I}{U-\left(R_r + R_p\right)I} = 687$ ob/min

4.25 Jednosmerni motor sa paralelnom pobudom ima sledeće nominalne podatke: U=220V, P=9kW, I=46A, n=1450 ob/min. Otpor namotaja rotora je R_r=0,3Ω, a pobude R_p=110Ω. Pad napona na kolektoru i reakcija indukta se mogu zanemariti. Kojom brzinom treba rotirati motor priključen na mrežu U=220V da bi kao generator koji daje mreži struju I_g=48A .

REŠENJE: Zavisnost radne brzine od struje u kolu rotora kod motora analitički se može iskazati jednačinom:

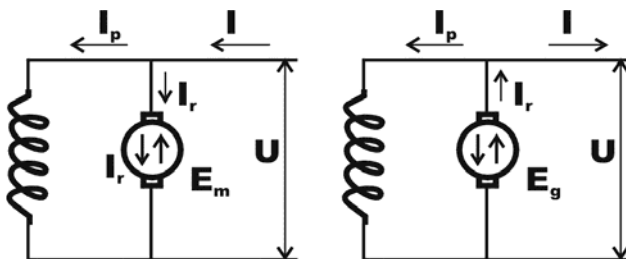
$$n = \frac{U - R_r I_r}{c\Phi} = \frac{U}{c\Phi} - \frac{R_r}{c\Phi} I_r \ .$$

Ova zavisnost brzine i struje prikazana ja na grafiku n=n(I).



sl.4.1

U prvom kvadrantu ($n<n_o$) mašina radi kao motor i smer struje je od mreže ka motoru. U II kvadrantu brzina je veća od brzine n_o , a struja ima suprotan smer odnosno od mašine prema mreži .



Kada mašina radi kao motor, važe relacije:

$$I_r = I + I_p = I - \frac{U}{R_p} = 48 - \frac{220}{110} = 46\text{A} \ ,$$

$E_m = cn_m\Phi = U - R_r I_r = 220 - 46 \cdot 0{,}3 = 206{,}2\text{V}.$

Kada se dejstvom spoljnjeg momenta brzina poveća indukovana ems E_g je veća od napona mreže pa mašina radi kao generator:

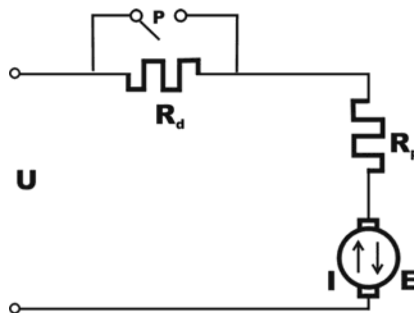
$$I_r = I + I_p = 48 + \frac{220}{110} = 48 + 2 = 50\text{A},$$

$$E_g = cn_g\Phi = U + I_r R_r = 220 + 50 \cdot 0{,}3 = 235\text{V}.$$

Deobom jednačina za indukovane elektromotorne sile dobija se:

$$\frac{E_g}{E_m} = \frac{cn_g\Phi}{cn_m\Phi} = \frac{n_g}{n_m}, \quad n_g = n_m\frac{E_g}{E_m} = 1450\frac{235}{206{,}2} = 1652 \text{ ob/min}.$$

4.26 Motor jednosmerne struje sa rednom pobudom priključen na napon U=120V pri struji I=24A i brzini od 1500 ob/min razvija moment M_k=14Nm. Otpornost pobudnog namotaja je R_p=0,1Ω, a namotaja rotora R_r=0,25Ω. Odrediti snagu gubitaka zbog zagrevanja namotaja, snagu ostalih gubitaka, stepen korisnog dejstva kao i vrednost otpora za ograničenje polazne struje na vrednost $I_p \leq 120$ A.



REŠENJE:

Na osnovu energetskog bilansa potrošnje struje sa rednom pobudom dobija se sledeća relacija:

$P_{el} = P_{km} + P_J + P_g'$, gde je

$P_{el} = U \cdot I = 120 \cdot 24 = 2880\text{W}$, snaga kojom se motor napaja iz izvora električne struje,

$P_J = R_r I^2 + R_p I^2 = 0{,}25 \cdot 24^2 + 0{,}1 \cdot 24^2 = 201{,}6\text{W}$,

snaga Džulovih gubitaka na otpornostima namotaja rotora i pobude

$$P_{km} = M_k\omega = M_k\frac{2\pi \cdot n}{60} = \frac{2 \cdot 3{,}14 \cdot 1500}{60}14 = 2198\text{W},$$

Mehanička korisna snaga koju motor predaje mehaničkom sistemu u elektromotornom pogonu

$$P_g^{'} = P_{el} - \left(P_{km} + P_J\right) = 2880 - \left(2198 + 201{,}6\right) = 480{,}4\text{W}$$

snaga gubitaka usled trenja, ventilacije i u gvožđu.
Stepen korisnog dejstva motora je:

$$\frac{P_{km}}{P_{el}} = \frac{P_{el} - P_J - P_g^{'}}{PP_{el}} = \frac{2198}{2880} = 0{,}763 \; .$$

Ograničenje vrednosti polazne struje motora postiže se rednom vezom otpornika R_d. Za kolo motora važi jednačina:

$$U = c\Phi n + \left(R_r + R_p + R_d\right)I_p \; .$$

No kako je pri puštanju u rad brzina n=0 i indukovna kontraelektromotorna sila $E=c\Phi n=0$, na osnovu gornje relacije sledi:

$$R_d = \frac{U}{I_p} - R_r - R_p = 0{,}5\Omega \; .$$

Posle pokretanja motora prekidač se zatvara i struja teče preko kontakta prekidača .

4.27 Motor za jednosmernu struju sa rednom pobudom priključen na napon U=500V razvija obrtni moment M_1=176Nm pri struji I_1=41A i brzini obrtanja n=1000o/min. Zbir otpora pobude i rotor $R_p+R_r=0.2\Omega$, a magnetni fluks pobude je proporcionalan struji ($\Phi=k_\Phi I$). Odrediti:

a) kontraelektromotornu silu
b) pri momentu M_2=87Nm (kada se motor rastereti) odrediti struju I_2, kontraelektromotornu silu EMS_2 i n_2 .

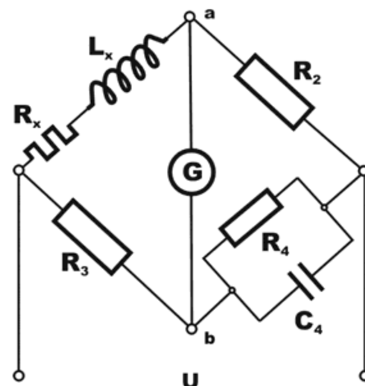
REŠENJE: a) E=491.8v, b) E=495.9V, I_2=20.3A, n_2=1008.4o/min

4.28 Koliki otpor treba ugraditi na red sa namotajima motora za jednosmernu struju sa rednom pobudom da bi mu se brzina smanjila sa n_1=800o/min na n_2=500o/min a da struja motora ostane nepromenjena I=15A. Ukupan otpor namotaja rotora i pobude je $R_p+R_r=1.2\Omega$, U=300V.
REŠENJE: *R=1.5Ω,*

4.29 Motor za jednosmernu struju sa paralelnom pobudom ($R_p=48\Omega$, $R_r=0.15\Omega$) priključen je na napon U=110V i pri struji I=150A ima brzinu n_1=1500o/min. Koliki otpor treba ugraditi redno sa namotajem rotor da bi se brzina smanjila na n_2=1000o/min.

REŠENJE: Vidi zadatke 4.23, 4.24 i 4.26

4.30 Motor jednosmerne struje sa paralelenom pobudom (R_p=55Ω, R_r=0.2Ω) priključen je na napon U=220V pri struji I_1 =104A ima brzinu n_1=1000o/min. koliki otpor treba ugraditi na red sa namotajem rotora da bi se brzina smanjila na n_2=700o/min.
REŠENJE: *R=0.4Ω*



4.31 Motor jednosmerne struje sa paralelnom pobudom (R_r=0.2Ω, R_p=100Ω) priključen na napon U=400V pri struji I_1=153A rotira brzinom n_1=1000o/min. Gubici u trenju usled ventilacije i u gvo|u iznose 850W. Odrediti moment koji razvija i stepen korisnog dejstva motora
REŠENJE: η *=0.986, M=585.9 Nm*

4.32 U mostu prikazanom na slici ravnoteža je uspostavljena pri R_2=1000Ω, R_3=100Ω, C_4=259,7 nF. Odrediti R_x i L_x ako je R_4=32kΩ.

REŠENJE: Ravnoteža u mostu nastupa kada je ispunjen uslov:

$$Z_x Z_4 = Z_2 Z_3$$

gde je $Z_2=R_2$, $Z_3=R_3$, $Z_x=R_x+j\omega L$, a admitansa $Y_4=\dfrac{1}{Z_4}$.

Gornji uslov ravnoteže se može napisati u obliku:

$$\frac{Z_x}{Y_4} = Z_2 Z_3 = R_2 R_3 \text{ , gde je } Y_4 = \frac{1}{R_4} + j\omega C_4 \text{ .}$$

Posle zamene i sređivanja dobija se:

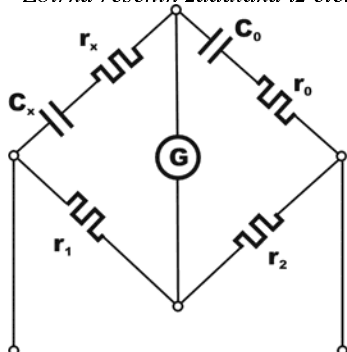
$$\frac{R_x}{R_2 R_3} + j\frac{\omega L_x}{R_2 R_3} = \frac{1}{R_4} + j\omega C_4$$

a na osnovu ove jednačine:

$$\frac{R_x}{R_2 R_3} = \frac{1}{R_4} \text{ , } R_x = \frac{R_2 R_3}{R_4} = 3{,}12\ \Omega \text{ , i } j\frac{\omega L_x}{R_2 R_3} = j\omega C_4 \text{ , } L_x = C_4 R_2 R_3 = 26\text{mH .}$$

4.33 Ravnoteža u mostu prikazanom na slici nastupa kada je R_o=9,8Ω, C_o=1μF, R_1=1014 Ω i R_2=9810 Ω. Odrediti R_x i C_x .

REŠENJE: Iz uslova ravnoteže $Z_1Z_4=Z_2Z_3$ sledi:



$$\left(R_x + \frac{1}{j\omega C_x}\right)R_2 = \left(R_o + \frac{1}{j\omega C_o}\right)R_1,$$

odnosno $R_x R_2 + R_2 \frac{1}{j\omega C_x} = R_o R_1 + R_1 \frac{1}{j\omega C_o}$

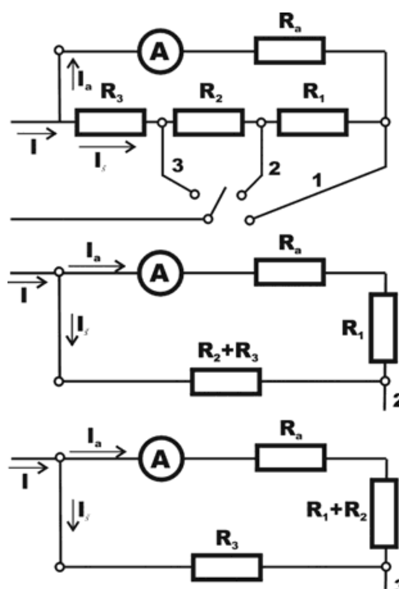
Posle izjednačavanja realnih i imaginarnih delova sa leve i desne strane jednačine dobija se:

$R_x R_2 = R_o R_1$, R_x=1,01 Ω , kao i $R_2 \frac{1}{j\omega C_x} = R_1 \frac{1}{j\omega C_o}$, $C_x = C_o \frac{R_2}{R_1} = 9{,}68$ μF .

4.34 Kazaljka mernog instrumenta unutrašnjeg otpora R_i=12Ω skrene do zadnje podele pri struji I_a=5 mA. Odrediti vrednosti otpornosti R_1, R_2 i R_3 tako da se merni instrument sa otpornostima vezanim prema slici može koristiti za merenje jačine struje u opsezima 50 mA (1), 0,5 A (2) i 5A (3).

REŠENJE: Proširenje mernog opsega ampermetra vrši se paralelnim vezivanjem otpora R_s. Ako je unutrašnja otpornost ampermetra R_a i treba proširiti merni opseg m-puta. Otpornost R_s određuje se na osnovu jednačine:

$R_š = \frac{R_a}{m-1}$



Prema šemi za proširenje mernih opsega koja je data na slici kada je preklopnik u položaju 1 je:

$m_1 = \frac{0{,}50}{0{,}005} = 10$, $R_š = R_1 + R_2 + R_3$.

U položaju 2 preklopnika je:

$m_2 = \frac{0{,}5}{0{,}005} = 100$, $R_š' = R_2 + R_3$, $R_a' = R_a + R_1$

dok je u položaju 3 preklopnika:

$m_3 = \frac{5}{0{,}005} = 1000$, $R_š'' = R_a + R_1 + R_2$.

S obzirom na jednačinu, a za položaje 1, 2 i 3 može se napisati sledeći sistem jednačina:

$$R_1 + R_2 + R_3 = \frac{R_a}{m_1 - 1}$$

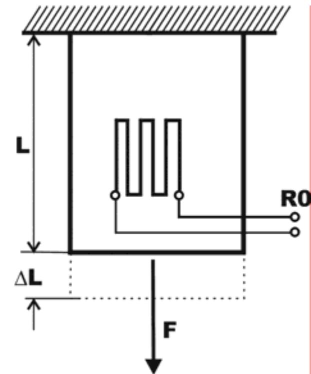
$$R_2 + R_3 = \frac{R_a + R_1}{m_2 - 1}$$

$$R_3 = \frac{R_a + R_1 + R_2}{m_3 - 1}$$

Rešavanjem sistema jednačina 1-3 dobija se:

$$R_1 = \frac{(m_2 - m_1)R_a}{m_2(m_1 - 1)} = \frac{R_a}{10}\ ,\ R_2 = \frac{m_1(m_3 - m_2)R_a}{m_2 m_3(m_1 - 1)} = \frac{R_a}{100}$$

$$R_3 = \frac{m_1 R_a}{m_3(m_1 - 1)} = \frac{R_a}{900}$$



Posle zamene brojnih vrednosti dobija se:
R_1=1,2 Ω, R_2=0,12Ω , R_3=0,013Ω

4.35 Na površini čeličnog valjka prečnika d=20 mm i modula elastičnosti E=$2\cdot10^{11}$ N/m^2 zalepljena je merna, tenzometrijska traka kontante K=2 i otpora R_o=120 Ω. Ako se valjak optereti aksijalnom silom F=63 kN, izračunati promenu otpornosti merne trake.

REŠENJE: Pri aksijalnom opterećenju valjka dužine L i preseka S silom F u granicama elastičnih deformacija prema Hukovom zakonu je:

$$\frac{F}{S} = E\frac{\Delta l}{l}$$

Relativna dužinska deformacija je:

$$\frac{\Delta l}{l} = \frac{F}{S \cdot E} = \frac{63 \cdot 10^3}{\frac{20^2}{4}10^{-6} \cdot 2 \cdot 10^{11}} = 0{,}1 \cdot 10^{-2} = 0{,}1\%$$

Relativna promena otpornosti merne trake je:

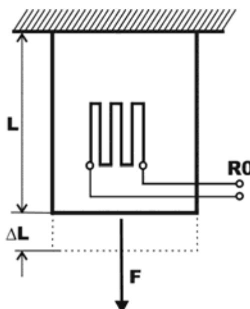
$$\frac{\Delta R}{R} = K\frac{\Delta l}{l} = 0{,}2 \cdot 10^{-2} = 0{,}2\%$$

S obzirom na smer sile promena, povećanje otpornosti merne trake je:

$$\Delta R = R - R_o = 0{,}24\Omega$$

4.36 Ako se merna traka iz prethodnog zadatka veže sa otpornicima $R_2=R_3=R_4$=120Ω u Vitstonov most i priključi na napon U=10V, izračunati napon

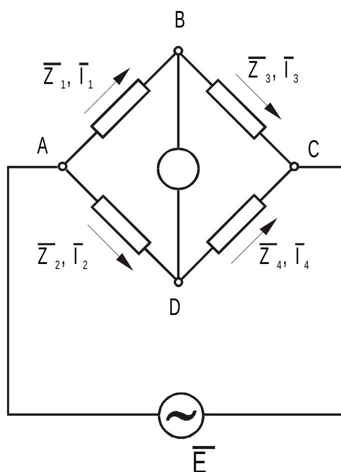
U_{ab} kada na valjak deluje sila F, ako je ulazna otpornost mernog instrumenta R_i velika.



REŠENJE: S obzirom da je ulazna otpornost mernog instrumenta velika, struja kroz mernu granu mosta je zanemarljiva, pa je napon između tačaka A i B u kolu:

$$U_{ab} = R'I_1 - RI_2 = \frac{UR'}{R+R'} - \frac{UR}{R+R} = 0{,}01\text{V}=10\text{mV}\ .$$

4.37 U mostu za naizmeničnu struju čija je šema prikazana na slici je dato:



$Z_1=R_x+j\omega L_x$, $Z_2=R_2+j\omega L_2$, $Z_3=R_3$, $Z_4=R_4$

Odrediti R_x i L_x ako je most u ravnoteži.

$$Z_1 \cdot Z_4 = Z_2 \cdot Z_3$$

$$\left(R_X + j\omega L_X\right)R_4 = \left(R_2 + j\omega L_2\right)R_3$$

$$R_X R_4 + j\omega R_4 L_X = R_2 R_3 + j\omega R_3 L_2$$

$$R_X R_4 = R_2 R_3 \Rightarrow R_X = \frac{R_2 R_3}{R_4}$$

$$R_4 L_X = R_3 L_2 \Rightarrow L_X = \frac{R_3 L_2}{R_4}$$

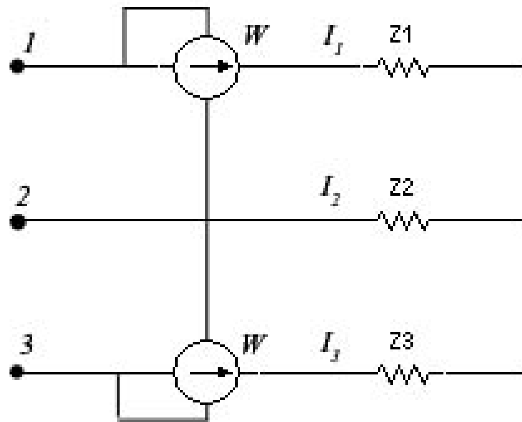
4.38 U mostu za naizmeničnu struju čija je šema prikazana na slici prethodnog zadatka dato je:

$$Z_1 = -1/j\omega C_x\ ,\ Z_2 = -1/j\omega C_2\ ,\ Z_3 = R_3\ ,\ Z_4 = R_4$$

Odrediti C_x ako je most u ravnoteži.

REŠENJE: Vidi zadatak 4.37

4.39 Trofazni simetrični potrošač, vezan u zvezdu kompleksnih opterećenja $Z_1 = Z_2 = Z_3 = Z = (15 + j15)\Omega$ uključen je u trofazni simetrični izvor napajanja efektivne vrednosti linijskog napona $U_L = 380V$.



Odrediti kompleksne struje i pad napona za svaku fazu, kao i pokazivanje vatmetra. Veza je prikazana na slici.

REŠENJE:

Fazni napon je:

$$U_1 = U = \frac{U_L}{\sqrt{3}} = \frac{380}{\sqrt{3}} \approx 220V$$

$$U_2 = 220\left(-\frac{1}{2} - j\frac{\sqrt{3}}{2}\right)V$$

$$U_3 = 220\left(-\frac{1}{2} + j\frac{\sqrt{3}}{2}\right)V$$

Tada je zbog simetrije:

$$I_1 = \frac{U_1}{Z_1} = \frac{220}{15 + j15} = (7{,}35 - j7{,}35)A$$

$$I_2 = \frac{U_2}{Z_2} = \frac{220\left(-\frac{1}{2} - j\frac{\sqrt{3}}{2}\right)}{15 + j15} = (-10 - j2{,}69)A$$

$$I_3 = \frac{U_3}{Z_3} = \frac{220\left(-\frac{1}{2} + j\frac{\sqrt{3}}{2}\right)}{15 + j15} = (2{,}69 + j10)A$$

Iz razloga simetričnosti potencijalna razlika neutralnih tačaka izvora i potrošača je nula, pa su padovi napona jednaki odgovarajućim faznim naponima.
Pokazivanje vatmetra, tj. aktivna snaga se određuje iz sledeće relacije:

$$P_{W2} = R_e\left(U_{12} \cdot I_1^*\right)$$

$$P_{W2} = R_e\left(U_{32} \cdot I_2^*\right)$$

I^* - konjugovano kompleksne vrednosti

$$U_{12} = U_1 - U_2 = 220\left(\frac{3}{2} + j\frac{\sqrt{3}}{2}\right)V$$

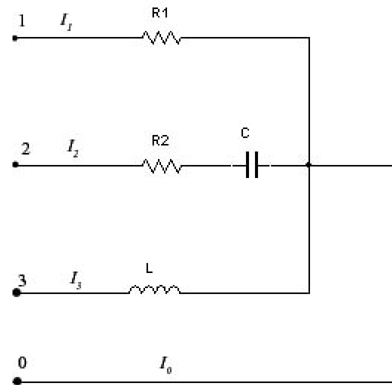
$$U_{32} = U_3 - U_2 = 220 j\sqrt{3}V$$

$$P_{W1} = R_e\left[220\left(\frac{3}{2} + j\frac{\sqrt{3}}{2}\right)(7{,}35 + j7{,}35)\right] = 1020W$$

$$P_{W2} = R_e\left[220 j\sqrt{3}(2{,}69 - j10)\right] = 3800W$$

4.40 Nesimetrični potrošač vezan u zvezdu priključen je na simetrični sistem za napajanje efektivne vrednosti napona $U_F = 220V$, $R_1 = 10\Omega$, $R_2 = 2{,}2\Omega$, $X_C = 4{,}4\Omega$ i $X_L = 5\Omega$. Naći kompleksne fazne struje i struju kroz neutralni provodnik.

REŠENJE:



$$U_1 = U_F = 220V$$

$$U_2 = 220\left(-\frac{1}{2} - j\frac{\sqrt{3}}{2}\right)V$$

$$U_3 = 220\left(-\frac{1}{2} + j\frac{\sqrt{3}}{2}\right)V$$

$$I_1 = \frac{U_1}{Z_1} = \frac{220}{10} = 22A$$

$$I_2 = \frac{U_2}{Z_2} = \frac{220\left(-\frac{1}{2} - j\frac{\sqrt{3}}{2}\right)}{2{,}2 - j4{,}4} = (24{,}5 - j37{,}3)A$$

$$I_2 = \frac{U_3}{Z_3} = \frac{220\left(-\frac{1}{2} + j\frac{\sqrt{3}}{2}\right)}{j5} = (38 + j22)A$$

$$I_0 = I_1 + I_2 + I_3 = (84{,}5 - j15{,}3)A$$

5. STACIONARNA STANJA I PRELAZNI PROCESI U ELEKTRIČNIM KOLIMA. USPOSTAVLJANJE I PREKID STRUJE U R-C-L I R-L-C KOLIMA. ELEKTROMEHANIČKE ANALOGIJE

Pri pražnjenju kondenzatora *kapaciteta C preko otpornika R, količina elektriciteta naelektrisanog kondenzatora q(t), napon na njemu* $u_c(t)$ *i jačina struje* $i_c(t)$ *se menjaju prema izrazima:*

$$q(t) = Q_o e^{-\frac{t}{RC}} \quad , \quad u_c(t) = \frac{Q_o}{C} e^{-\frac{t}{RC}} \quad i \quad i_c = \frac{u_c(t)}{R} = \frac{Q_o}{RC} e^{-\frac{t}{RC}}$$

gde je $Q_o=CU_o$ *– početna količina naelektrisanja kondenzatora, a* $RC=\tau$ *vremenska konstanta.*

Pri priključivanju kondenzatora *kapaciteta C na napon U preko otpornika R, naelektrisanje kondenzatora q, napon na njemu i struja menjaju se prema:*

$$q(t) = CU\left(1 - e^{-\frac{t}{RC}}\right) \quad , \quad u_c(t) = U\left(1 - e^{-\frac{t}{RC}}\right) \quad , \quad i_c(t) = \frac{U}{R} e^{-\frac{t}{RC}} \quad .$$

U kolu koje sadrzi induktivnost L i otpornost R pri priključivanju na izvor ems E, struja se uspostavlja prema :

$$i(t) = \frac{E}{R}\left(1 - e^{-\frac{R}{L}t}\right) = I_o\left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}\right) \quad , \quad \tau = \frac{L}{R}$$

Napon na otpornosti u_R *i induktivnosti* u_L *se vremenski menjaju prema:*

$$u_R(t) = R \cdot i = E\left(1 - e^{-\frac{R}{L}t}\right) \quad i \quad u_L = E - u_R = E \cdot e^{-\frac{R}{L}t} \quad .$$

Ako je r-otpornost paralelno vezana kalemu (redna veza R-L) pri prekidu struje kroz R-L kolo struja kroz kolo i napon u_L *se vremenski menjaju prema relaciji:*

$$i(t) = \frac{E}{R} e^{-\frac{R+r}{L}t} \quad , \quad u_L = \frac{r}{R} E \cdot e^{-\frac{R+r}{L}t} \quad .$$

Vremenska konstanta u ovom slučaju je $\tau = \dfrac{L}{R+r}$.

Pri pražnjenju naelektrisanog kondenzatora kapaciteta C preko redne veze otpornosti R i induktivnosti L važi relacija:

$$\frac{q}{C} - L\frac{di}{dt} - R \cdot i = 0 \quad .$$

Posle diferenciranja, zamene $i = -\frac{dq}{dt}$ *i sređivanja, dobija se diferencijalna jednačina:*

$$\frac{d^2 i}{dt^2} + \frac{R}{L}\frac{di}{dt} + \frac{1}{LC} i = 0$$ *, čije je rešenje* $$i(t) = \frac{U}{2kL} e^{-\delta t}\left(e^{kt} - e^{-kt}\right) \; ,$$

gde je U=Q_o/C, a Q_o naelektrisanje kondenzatora pri t=0, $\delta = \frac{R}{2L}, k = \sqrt{\delta^2 - \omega_o^2}, \omega_o^2 = \frac{1}{LC}$.

a) Za k=0 je $i = \frac{U}{k \cdot L} e^{-\delta t} sh(kt)$ *– pražnjenje kondenzatora je aperiodično.*

b) Za k=0 je $i = \frac{U}{L} t \cdot e^{-\delta t}$ *–pražnjenje kondenzatora je kritično aperiodično.*

c) Za $\delta^2 < \omega_o^2$ *je* $i = \frac{U}{\omega \cdot L} e^{-\delta t} \sin \omega t$ *– pražnjenje kondenzatora je periodično sa prigušenim oscilacijama .*

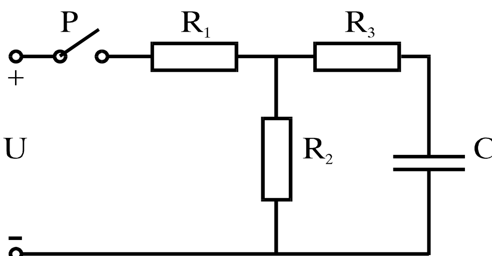
d) R=0, $i = \frac{U}{\omega_o L} \sin \omega_o t$ *–javljaju se harmonijske oscilacije, neprigušene .*

Oslobodjena toplota na otporniku R u prethodnim slučajevima pri uspostavljanju i prekidu struje u intervalu t_2-t_1 je:

$$dW_J = R \cdot i^2(t)dt \qquad W_J = \int_{t_1}^{t_2} R \cdot i^2(t)dt$$

5.1 U kolu čija je šema data na slici posle zatvaranja prekidača P uspostavljeno je stacionarno stanje. Poznato je U=120 V, R_1=100Ω, R_2=R_3=300Ω i C=100μF. Odrediti energiju kondenzatora C u trenutku t=120 ms posle otvaranja prekidača P i toplotnu energiju koja se u tom periodu oslobodi na otpornicima R_2 i R_3 .

REŠENJE: Kada je prekidač P zatvoren, u kolu se uspostavlja stacionarno stanje. Kroz granu kola sa otpornikom R_3 i kondenzatorom C ne teče struja, pa je napon na kondenzatoru:



$$U_c = U_{ab} = R_2 I = R_2 \frac{U}{R_1 + R_2} = 90 \text{ V} .$$

Količina elektriciteta kojom je kondenzator naelektrisan je:

$$Q_o = CU_c = 100 \cdot 10^{-6} \cdot 90 = 9 \text{ mC} \; ,$$

a energija kondenzatora je:

$$W_o = \frac{Q_o^2}{2C} = \frac{\left(9 \cdot 10^{-3}\right)^2}{2 \cdot 100 \cdot 10^{-6}} = 0{,}405 \text{ J} \ .$$

Posle otvaranja prekidača kondenzator C se prazni preko redne veze otpornika R_3 i R_2. Vremenska konstanta je:

$$\tau = \left(R_2 + R_3\right)C = (300 + 300)100 \cdot 10^{-6} = 60 \cdot 10^{-3} \text{ s} \ .$$

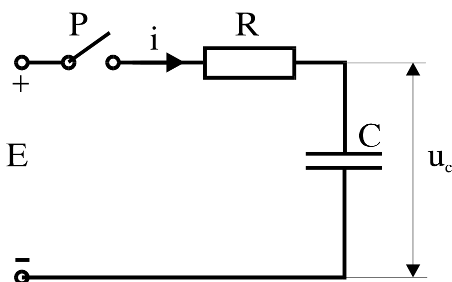
Pražnjenje kondenzatora opada prema $Q = Q_o e^{-\frac{t}{\tau}}$ i posle vremena t_1 iznosi $Q_1 = Q_o e^{-\frac{t_1}{\tau}}$. Posle zamene brojnih podataka dobija se $Q_1=1{,}22 \cdot 10^{-3}$ C . Energija kondenzatora u tom slučaju iznosi:

$$W_1 = \frac{1}{2C} Q_1^2 = \frac{\left(1{,}22 \cdot 10^{-3}\right)^2}{2 \cdot 100 \cdot 10^{-6}} = 7{,}4 \cdot 10^{-3} \text{ J} \ .$$

Prema zakonu o odrčanju energije toplotna energija koja se oslobodi na otpornicima R_2 i R_3 jednaka je razlici energije kondenzatora:

$$A_R = W_T = W_o - W_1 = 405 \cdot 10^{-3} - 7{,}4 \cdot 10^{-3} = 397{,}6 \text{ mJ} \ .$$

5.2 Kondenzator kapaciteta C=100μF redno vezan sa otpornikom R=1kΩ priključuje se na izvor ems E=120V preko prekidača P. Odrediti rad izvora ems u intervalu od uključivanja kola do trenutka t_1= 0,2s, kao i napon na kondenzatoru u tom trenutku. Kondenzator pre priključivanja nije naelektisan.



REŠENJE: Kada se kolo priključi na izvor zatvaranjem prekidača P počinje punjenje kondenzatora C, koji je pre toga bio neopterećen. Struja kroz kolo je i=dq/dt, a napon na krajevima kondenzatora je $u_c = \frac{q}{C}$. Jednačina naponske ravnoteže za ovo kolo je:

$$E - R \cdot i - u_c = 0 \quad ,$$

a posle zamene:

$$E - R\frac{dq}{qt} - \frac{q}{C} = 0 \quad .$$

Rešenje ove diferencijalne jednačine je pri q=0 za t=0 :

$$q(t) = CE\left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}\right)$$

a napon na krajevima kondenzatora se menja prema zakonu:

$$u_c = \frac{q}{C} = E\left(1 - e^{-\frac{t}{RC}}\right) \quad .$$

Za t=0,1s i RC=1000·100·10^{-6}=0,1s vrednost napona na kondenzatoru je:

$$u_c(t=0{,}1)=120\left(1-e^{-\frac{0{,}2}{0{,}1}}\right)=U_1=105{,}76\ \text{V}\ .$$

Struja kroz kolo se menja prema :

$$i=\frac{dq}{dt}=\frac{E}{R}e^{-\frac{t}{\tau}}\quad \text{, gde } \tau=RC=0{,}1\text{s}\ .$$

Ako jednačinu naponske ravnoteže za kolo:

$$E=R\cdot i+u_c=R\cdot i+\frac{q}{C}\quad ,$$

pomnožimo sa dq=idt dobijamo:

$$E\cdot i\cdot dt=R\cdot i^2dt+\frac{q}{C}dq\quad ,$$

a posle integraljenja leve i desna strane u intervalu 0 do t dobija se energetski bilans u kolu u tom intervalu.

$$\int_0^{t_1}E\cdot idt=\int_0^{t_1}R\cdot i^2dt+\int_0^{Q}\frac{q}{C}dq=A_r+W_c\quad .$$

Član na levoj strani je ukupan rad izvora ems E od trenutka zatvaranja prekidača P do trenutka t_1 .

Toplotna energija koja se u tom intervalu oslobodi na otporniku R određuje se prvim članom sa desne strane jednačine:

$$A_r=\int_0^{t_1}R\cdot i^2dt=\int_0^{t_1}R\cdot\left(\frac{E}{R}\right)^2e^{-\frac{2t}{\tau}}dt=\frac{E^2}{R}\left(-\frac{RC}{2}\right)e^{-2\frac{t}{\tau}}\Big|_0^{t_1}=\frac{E^2C}{2}\left(-e^{-4}+e^{0}\right)=0{,}7\ \text{J}$$

.

Energija kondenzatora u trenutku t posle zatvaranja prekidača se izračunava se drugim članom jednačine:

$$W_c=\int_0^{Q}\frac{q}{C}dq=\frac{Q^2}{2C}=\frac{1}{2}CU_1^2=0{,}5\cdot100\cdot10^{-6}\cdot105{,}76^2=0{,}56\ \text{J}\ .$$

a rad izvora elektromotorne sile na osnovu gornje jednačine je:

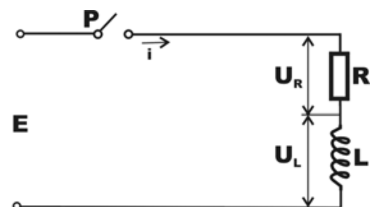
$$A_E=A_r+W_c=0{,}7+0{,}56=1{,}26\ \text{J}\ .$$

Rad izvora ems se moze naći i neposredno integraljenjem leve strane jednačine posle zamene izraza za struju kroz kolo u intervalu t=0 do $t=t_1$,

$$A_E=\int_0^{t_1}E\cdot idt=\int_0^{t_1}E\frac{E}{R}e^{-\frac{t}{RC}}dt=E^2\frac{1}{R}(-RC)e^{-\frac{t}{RC}}\Big|_0^{t_1}=E^2C\left(1-e^{-\frac{t_1}{RC}}\right)=1{,}25\ \text{J}\ ,$$

što je približno kao i u prvom slučaju, a razlika se javlja pri izračunavanju.

5.3 Otpornost R=20Ω i induktivnost L=0,1H priključuju se na izvor ems E=24V preko prekidača P. Odrediti rad izvora u intervalu od zatvaranja prekidača do trenutka t=15ms kao i jačinu struje u tom trenutku.



REŠENJE: Posle zatvaranja prekidača P u kolu se uspostavlja struja i(t). Jednačina naponske ravnoteže za kolo pri vrednosti struje i(t)=i je:

$$E = R \cdot i + L\frac{di}{dt} = u_R + u_L \qquad (1)$$

Rešavanjem ove diferencijalne jednačine za početne uslove t=0, i(t)=i(0)=0 je:

$$i(t) = \frac{E}{R}\left(1 - e^{-\frac{R}{L}t}\right)$$

Vremenska konstanta kola je $\tau = \frac{L}{R} = \frac{0{,}1}{20} = 5 \cdot 10^{-3}$ s=5ms .

U trenutku t =25ms posle zatvaranja prekidača P jačina struje kroz kolo je:

$$i(t_1) = \frac{24}{20}\left(1 - e^{-\frac{15}{\tau}}\right) = 1{,}2(1 - 0{,}05) = 1{,}14 \text{ A} .$$

Kada levu stranu jednačine (1) pomnožimo sa idt dobija se:

$$E \cdot idt = R \cdot i^2 dt + L \cdot idi \quad .$$

Ova jednačina iskazuje zakon o održanju energije u kolu u vremenskom intervalu dt. Ako integralimo levu i desnu stranu ove jednačine u intervalu od t=0 do $t=t_1$, odnosno u granicama za jačinu struje od i=0 do $i=i(t_1)$, dobijamo energetski bilans u kolu u tom intervalu:

$$\int_0^{t_1} E \cdot idt = \int_0^{t_1} R \cdot i^2 dt + \int_0^{I_{t1}} L \cdot idi = A_r + W_m \quad .$$

Član sa leve strane predstavlja rad izvora ems u tom intervalu.

$$\int_0^{t_1} Eidt = \frac{E^2}{R}\left(t + \frac{L}{R}e^{-\frac{t}{\tau}}\right)\Bigg|_0^{t_1} = 0{,}295\text{J} .$$

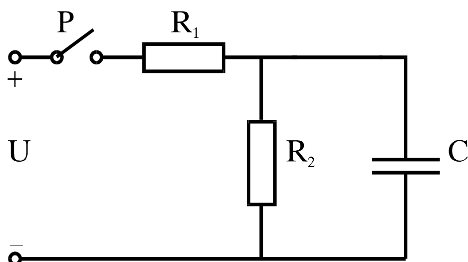
Drugi član sa desne strane predstavlja energiju magnetnog polja:

$$W_m = \int_0^{i(t_1)} Lidi = \frac{1}{2}L \cdot i_{t_1}^2 = 0{,}5 \cdot 0{,}1 \cdot 1{,}14^2 = 0{,}065 \text{ J} \quad .$$

Prvi član sa desne strane predstavlja energiju koja se u vidu toplote oslobodi na otporniku R. Prema zakonu o održanju energije iznosi:

$$A_r = A_E - W_m = 0{,}295 - 0{,}065 = 0{,}23 \text{ J} \quad .$$

5.4 Odrediti vrednost napona U na koji treba priključiti kolo prikazano na slici tako da pri zatvorenom prekidaču P i uspostavljenom stacionarnom stanju elektrostatička energija kondenzatora C=100μF bude W=0,32J. Dato je R_1=500Ω i R_2=1kΩ. Odrediti vreme potrebno da napon na kondenzatoru opadne na polovinu početne vrednosti posle otvaranja prekidača kao i



toplotnu energiju koja se oslobodi na otporniku R_2 za to vreme.

REŠENJE: U stacionarnom stanju struja kroz kolo je:

$$i = \frac{U}{R_1 + R_2}$$

a napon na kondenzatoru je:

$$U_c = R_2 I = R_2 \frac{U}{R_1 + R_2} = \frac{2}{3} U$$

odakle se dobija:

$$U = \frac{3}{2} U_c = 1{,}5 U_c \quad .$$

Na osnovu izraza za energiju kondenzatora :

$$W = \frac{1}{2} C U_c^2 \quad ,$$

dobija se vrednost napona na kondenzatoru:

$$U_c = \sqrt{\frac{2W}{C}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 0{,}32}{100 \cdot 10^{-6}}} = 80\text{V}$$

a vrednost napona na koji treba priključiti kolo je $U=1{,}5 \cdot U_c=120$V. Posle otvaranja prekidača kondenzator se prazni preko otpornika $R_2=1000\Omega$ pri čemu je:

$$u_c + R_2 i = 0 \text{ , odnosno } R_2 \frac{dq}{qt} + \frac{q}{C} = 0$$

Za početne uslove $t=0$, $q=Q_o=CU$ rešenje diferencijalne jednačine je:

$$q(t) = C U_c e^{-\frac{t}{\tau}} \text{ , a odatle } u(t) = \frac{q(t)}{C} = U_c e^{-\frac{t}{\tau}}$$

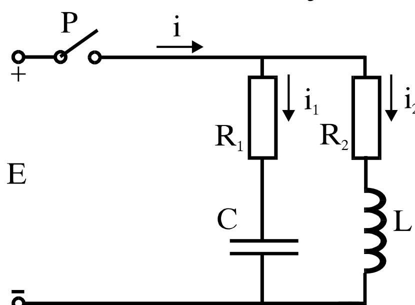
gde je vremenska konstanta $\tau=R_2C=1000 \cdot 100 \cdot 10^{-6}=0{,}1$s .
Kako je prema zahtevu u zadatku :

$$u(t) = \frac{U_c}{2} \text{ , sledi da je } \frac{U_c}{2} = U_c e^{-\frac{t}{\tau}}$$

a vreme potrebno da napon U_c opadne na polovinu je $t=0{,}1 \cdot \ln 2=0{,}0693$s. Energija koja se u vidu toplotne energijeoslobodi na otporniku R_2 je:

$$W_t = W - \frac{1}{2} C \left(0{,}5 \cdot U_c\right)^2 = 0{,}32 - 0{,}08 = 0{,}24\text{J}$$

5.5 Deo kola sastavljen od dve paralelne grane priključuje se preko prekidača P na stalan napon U=60 V. Poznato je $R_1=R_2=50\Omega$, C=10μF. Odrediti induktivnost L tako da ukupna struja kroz obe grane posle zatvaranja prekidača P ima konstantnu vrednost kao i vrednost struje.



REŠENJE: Da bi struja imala konstantnu vrednost zbir struja kroz obe grane :

$$i(t) = i_1(t) + i_2(t) \quad ,$$

ne treba da zavisi od vremena, odnosno zbir članova u krajnjem izrazu za ukupnu struju koji sadrče promenljivu t, treba da bude jednak nuli. Struja kroz granu sa kondenzatorom $i_1(t)$ posle zatvaranja prekidača, u funciji vremena je:

$$i_1(t) = \int \frac{dq}{dt} = \int \frac{d}{dt}\left[Q_o \left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}} \right) \right] = \frac{CU}{RC} e^{-\frac{t}{\tau_1}} = \frac{U}{R_1} e^{-\frac{t}{\tau_1}} \quad \text{, gde je } \tau_1=R_1C \text{ .}$$

Struja kroz granu sa induktivnošću se vremenski menja prema izrazu:

$$i_2(t) = \frac{U}{R_2}\left(1 - e^{-\frac{t}{\tau_2}} \right) \quad \text{, gde je } \tau_2=L/R_2$$

a ukupna struja kroz obe grane je:

$$i(t) = i_1(t) + i_2(t) = \frac{U}{R_1} e^{-\frac{t}{\tau_1}} + \frac{U}{R_2} - \frac{U}{R_2} e^{-\frac{t}{\tau_2}}$$

Struja i(t) ne zavisi od vremena ako je:

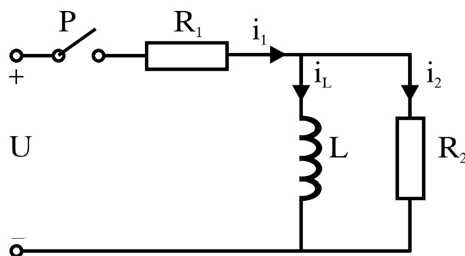
$$\frac{U}{R_1} e^{-\frac{t}{\tau_1}} - \frac{U}{R_2} e^{-\frac{t}{\tau_2}} = 0$$

a pošto je $R_1=R_2=R$, iz gornjih relacija se dobija:

$$e^{-\frac{t}{\tau_1}} = e^{-\frac{t}{\tau_2}} \quad \text{, odakle je } \tau_1=\tau_2 \text{ , odnosno } CR_1=L/R_2$$

odakle je $L=C\cdot R^2=10\cdot 10^{-6}\cdot 50^2=25$mH, a struja I=U/R=1,2A.

5.6 U kolu na slici poznato je: $R_1=100\Omega$, $R_2=200\Omega$ i L=0,32H. Odrediti jačinu struje kroz induktivnost i_L u trenutku t=0,01s posle zatvaranja prekidača P i energiju magnetnog polja.



REŠENJE: U trenutku t posle zatvaranja prekidača za kolo na slici mogu se napisati sledeće relacije:

$$i_1 = i_L + i_2 \qquad (1)$$

$$R_1 i_1 + L\frac{di_L}{dt} = U \qquad (2)$$

$$R_2 i_2 - L\frac{di_L}{dt} = 0 \qquad (3)$$

Zamenom vrednosti za i_2 iz jednačine (3) dobijamo:

$$i_1 = i_L + \frac{L}{R_2}\frac{di_L}{dt} \quad .$$

Posle zamene i_1 u jednačinu (2) dobija se:

$$R_1\left(i_L + \frac{L}{R_2}\frac{di_l}{dt}\right) + L\frac{di_L}{dt} = U \quad \text{, odnosno} \quad L\left(1+\frac{R_1}{R_2}\right)\frac{di_L}{dt} + R_1 i_1 = U \quad .$$

Posle deobe svih članova diferencijalne jednačine sa R_1 i uvođenja smene dobija se:

$$\frac{di_L}{dt} + i_1 = I_o \quad .$$

Uz početne uslove t=0, $i_L(0)=0$ dobija se rešenje gornje diferencijalne jednačine u obliku:

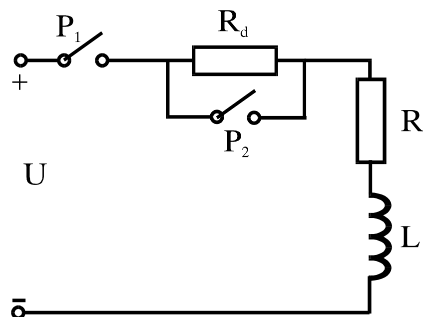
$$i_L(t) = I_o\left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}\right)$$

a kako je $\tau=4{,}8\cdot 10^{-3}=4{,}8$ms i $I_o=1{,}0$A , to je:

$$i_L(t) = 1\left(1 - e^{-208{,}3t}\right) \text{ (A)} \quad .$$

U trenutku t=0,1 s je struja $i_L=0{,}875$ A. Energija magnetnog polja je $W_m = \frac{1}{2}L\cdot i_L^2 = 0{,}123\text{J}$.

5.7 Pobudni namotaj mašine jednosmerne struje ima otpornost R=24Ω i induktivnost L=2H. Namotaj se napaja iz izvora U=220V, a potrebna vrednost struje I_p=5A dobija se rednim vezivanjem otpornika R_d . Da bi se skratilo vreme uspostavljanja fluksa koristi se šema data na slici. Kolo se na izvor priključuje preko prekidača P_1. Kada struja dostigne vrednost $i(t)=I_p$ otvara se prekidač P_2 i na taj način redno u kolo veze otpornik R_p. Odrediti vreme od uključivanja P_1 do isključivanja P_2 . Za koje vreme struja dostigne vrednost i=0,96 I_p pri stalno isključenom prekidaču P_2 . Uporediti ova vremena.



REŠENJE: Otpornost R_d se izračunava iz uslova da je I_p=5A a na osnovu:

$$I_p = \frac{U}{R + R_d}$$ odakle je R_d=20Ω .

Pri zatvorenom prekidaču P_1 po drugom Kirhofovom zakonu je:

$$U = L\frac{di}{dt} + R \cdot i \quad .$$

Posle uvođenja smena τ_1=L/R i I_o=U/R, dobija se diferencijalna jednačina:

$$L\frac{di}{dt} + i = I_o$$

Za početne uslove t=0, i=0 rešenje diferencijalne jednačine je:

$$i(t) = I_o(1 - e^{-\frac{t}{\tau_1}})$$

Vremenska konstanta kola je τ_1=L/R=2:24=0,083s=83ms, a jačina struje I_o=U/R=9,17A. Vreme za koje se uspostavlja potrebna vrednost struje od I_p=5A dobija se iz uslova:

$$i(t) = I_p = I_o\left(1 - e^{-\frac{t}{\tau_1}}\right)$$

odakle je $e^{-\frac{t_1}{\tau_1}} = 1 - \frac{I_p}{I_o} = \frac{1}{2,2}$, a t_1=0,0654s=65,4ms .

Kada je prekidač stalno otvoren otpornost kola je R'=R+R_d .Pri uključivanju prekidača P_1 struja se menja prema:

$$i(t) = I_o'\left(1 - e^{-\frac{t_2}{\tau_2}}\right) = 0{,}96 I_p$$

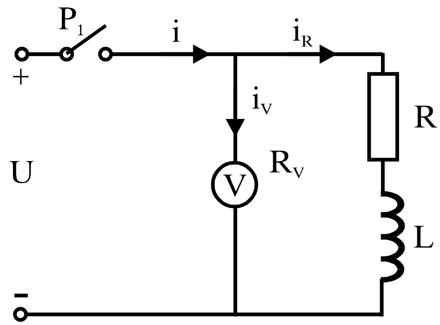
gde je vremenska konstanta $\tau_2 = \frac{L}{R + R_d} = 0{,}04545$s=45,4ms, a

$$I_o' = \frac{U}{R + R_d} = 5\text{A} \,.$$

Posle zamene vrednosti u izrazu za i(t) pri uslovu i(t)=I_o' dobija se vreme t_2=0,146s=146ms .

Odnos vremena uspostavljanja struje je $t_2 : t_1$ = 2,24 .

5.8 Voltmetar unutrašnjeg otpora R_v=2,2kΩ na opsegu U_v=200V priključen je paralelno namotaju elektromagneta otpornosti R=32Ω i induktivnosti L=1,8H na izvor jednosmerne struje U=24V. Odrediti napon na krajevima voltmetra u trenutku otvaranja prekidača P (kada se prekida struja kroz kolo). Kolika se toplota razvija na otporu R_v posle otvaranja prekidača?



REŠENJE: Posle otvaranja prekidača P prelazni režim se može opisati, na osnovu drugog Kirhofovog zakona, jednačinom:

$$L\frac{di}{dt}+(R+R_v)i=0 \text{ , odnosno } \frac{L}{R+R_v}\frac{di}{dt}+i=\tau\frac{di}{dt}+i=0 \text{ ,}$$

gde je $\tau=\frac{L}{R+R_v}=8{,}06\cdot 10^{-4}$=0,8ms vremenska konstanta kola.

Posle razdvajanja promenljivih dobija se $\frac{di}{i}=-\frac{dt}{\tau}$. Uz početne uslove t=0, i(t)=U/R=0,75A, ($i_{L,R}$ >> i_{Rv}), rešenje diferencijalne jednačine je :

$$i(t)=\frac{U}{R}e^{-\frac{t}{\tau}} .$$

Elektromotorna sila usled samoindukcije je:

$$e_L=-L\frac{di}{dt}=\frac{LU}{R}e^{-\frac{t}{\tau}} .$$

Najveća vrednost indukovane ems je $E_{Lm}=\frac{UL}{R\tau}=\left(1+\frac{R_v}{R}\right)U=1674\text{V}$.

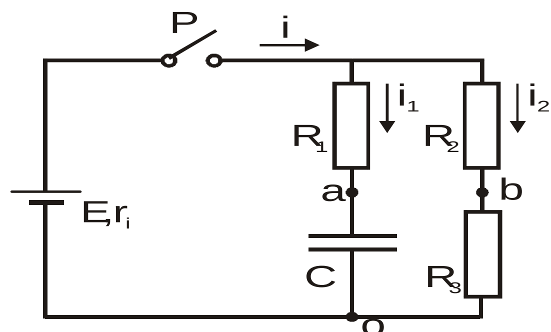
Indukovana ems ima značajnu vrednost, oko 8 puta veću od opsega U_v voltmetra (E_{lm} : U_v=8,37).

Ukupna toplota koja se oslobodi je:

$$Q=Q_V+Q_R=0{,}5\text{J} .$$

5.9 Dve paralelne grane u kolu prikazanom na slici priključe se na izvor ems E=120V (r_i=0) zatvaranjem prekidača P. Ako je R_1=R_3=1kΩ, R_2=600Ω i C=100μF, odrediti:

a) vreme t_1 od uključivanja izvora do



izjednačavanja potencijala tačaka A i B u kolu (U_{AB}=0),
b) rad izvora ems E u tom intervalu i
c) toplotnu energiju koja se oslobodi u kolu posle otvaranja prekidača u trenutku t_1

REŠENJE :
a) Posle zatvaranja prekidača napon U na otporniku R_3 je:

$$U_{bo} = R_3 I_2 = R_3 \frac{E}{R_2 + R_3} = 75\text{V} \ .$$

Napon na kondenzatoru $U_c=U_{ao}$ se pri punjenju kondenzatora vremenski menja prema relaciji :

$$U_{ao} = U_c = \frac{q(t)}{C} = E\left(1 - e^{\frac{t}{\tau}}\right) \quad ,$$

gde je vremenska konstanta $\tau=R_1C=0{,}1$s .
Prema zahtevu koji je postavljen u zadatku treba da bude :

$$U_c = U_{ao} = U_{bo} \ , \text{ odnosno } R_3 \frac{E}{R_2 + R_3} = E\left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}\right) \ .$$

Posle zamene brojnih podataka i izračunavanja dobija se da je $t=t_1=0{,}098$s=98ms .
b) Struja kroz izvor ems E je jednaka zbiru struja kroz grane:

$$i(t) = i_2(t) + i_1(t) \ .$$

Struja $i_2(t)$ ima konstantnu vrednost $i_2(t) = I_2 = \dfrac{E}{R_2 + R_3} = 0{,}075\text{A}$, a struja kroz granu sa kondenzatorom se menja prema:

$$i_1(t) = \frac{dq}{dt} = \frac{d}{dt}\left(Q_o e^{-\frac{t}{\tau}}\right) = \frac{d}{dt}\left(CEe^{-\frac{t}{CR}}\right) \ , \quad Q_o=CE \ , \quad i_1(t) = \frac{E}{R_1} e^{-\frac{t}{\tau}} = 0{,}12 e^{-10t}$$

Ukupna struja kroz izvor se menja prema zakonu:

$$i(t) = 0{,}075 + 0{,}12 e^{-10t}$$

Rad izvora ems E u intervalu dt je dA=E·i(t)dt, a u intervalu od zatvaranja prekidača do trenutka t_1 izjednačavanja potencijala je:

$$A = \int_0^{t_1} E \cdot i(t) dt = \int_0^{t_1} E \cdot i_1(t) dt + \int_0^{t_1} E \cdot i_2(t) dt = E \frac{E}{R_2 + R_3} t_1 + \int_0^{t_1} E \frac{E}{R_1} e^{-\frac{t}{\tau}} dt =$$

$$= 120 \frac{120}{1000 + 600} 0{,}098 + 120 \frac{120}{1000}\left(-\frac{1}{10}\right) e^{-10t} \Big|_0^{t_1} = 0{,}882 + (-0{,}54 + 1{,}44) = 1{,}78 J$$

Do istog rezultata se može doći na osnovu energetskog bilansa sabiranjem energija W_1, W_C, W_2 i W_3 na pojedinim potrošačima, pri čemu je:

$$W_1 = \int_0^{t_1} R_1 i_1^2 dt = \int_0^{t_1} E\frac{E^2}{R_1^2}e^{-\frac{2t}{\tau}}dt \quad , W_c = \frac{1}{2}CU_c^2 \quad , \; W_2 = R_2 i_2^2 t_1 = R_2\left(\frac{E}{R_2 + R_3}\right)^2 t_1 \quad ,$$

$$W_3 = R_3 i_2^2 t_1 = R_3\left(\frac{E}{R_2 + R_3}\right)^2 t_1$$

Prema zakonu o održanju energije rad izvora ems je:

$$A = \int_0^{t_1} E \cdot i(t)dt = W_1 + W_c + W_2 + W_3 \quad .$$

c) Posle otvaranja prekidača i isključivanja izvora ems E, kondenzator se prazni preko redne veze otpornika R_1+R_2+R_3 pri čemu struja opada prema jednačini $i(t) = I_o e^{-\frac{t}{\tau}}$, gde je $I_o=U_c/(R_1+R_2+R_3)$, a vremenska konstanta $\tau=(R_1+R_2+R_3)C$. Rad električne struje, odnosno toplotna energija koja se oslobodi na otpornicima je:

$$A' = W' = W_1' + W_2' + W_3' = (R_1 + R_2 + R_3) \cdot i^2(t)dt$$

Medjutim, po zakonu o održanju energije toplotna energija koja se oslobađa na otpornicima je jednaka energiji kondenzatora i iznosi:

$$A' = W' = \frac{1}{2}CU_c^2 = 0{,}5 \cdot 100 \cdot 10^{-6} 75^2 = 0{,}28\text{J}$$

5.10 Energija kondenzatora C_1=200μF koji je odvojen od izvora ima vrednost W_c=0.4J.

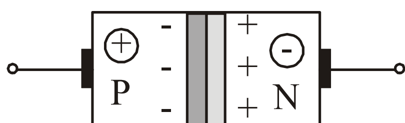
a) Ako se paralelno C_1 priključi kondenzator C_2=100μF (Q_2=0) odrediti napon na kondenzatorima

b) Odrediti otpor R koji treba priključiti kondenzatoru C_1(pomoću prekidača c) da bi se napon između elektroda kondenzatora smanjio od početne vrednosti U_0 do napona U_1=10V za vreme t_1=60ms.

REŠENJE: Vidi zadatak 5.9

6. POLUPROVODNICI, POLUPROVODNIČKE DIODE

Poluprovodnička dioda *je elektronska komponenta dvoslojne strukture od poluprovodnika P i N tipa. Kada dioda nije uključena u električno kolo na P strani spoja postoji velika koncentracija šupljina (+), a na N strani velika koncentracija slobodnih elektrona (-). Zbog difuzije šupljina u N područje i elektrona u P područje formira se prelazni sloj širine reda 1μm kao potencijalna barijera koja sprečava dalju difuziju.*

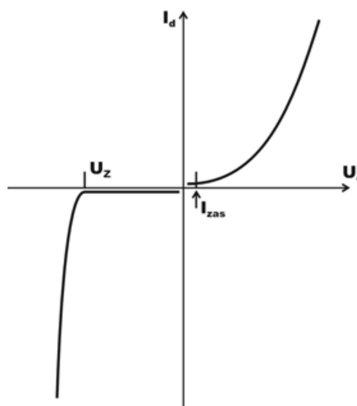




a) Pri vezivanju diode u kolo u direktnom provodnom smeru (A na +, K na -) nastaje kretanje šupljina ka N strani i elektrona ka P strani spoja. Gubitak nosioca naelektrisanja usled kombinacije se nadoknađuje iz izvora EMS. Potencijalna barijera se smanjuje, $P-N$ spoj provodi struju, a otpornost $P-N$ spoja je mala. Struja se ograničava otpornikom R_2.

b) Kada se dioda veže u neprovodnom inverznom smeru (A na -, a K na +) potencijalna barijera se povećava i otežava prelazak nosioca naelektrisanja preko spoja pa je struja kroz diodu mala. Dioda u inverznom smeru ima veliku otpornost. Pri velikoj vrednosti inverznog napona struja naglo raste i za male promene napona. Pri nekoj vrednosti napona U_Z dolazi do proboja.

Statička karakteristika $I_d=F(U_d)$



U prvom kvadrantu za $U_d > 0$ analitički oblik karakteristike se može predstaviti relacijom:

$$I_d = I_{zas}\left(e^{\frac{U}{mU_t}} - 1\right)$$

a u trećem kvadrantu ($U<0$) do vrednosti napona, koja je jednaka maksimalno dozvoljenom naponu u neprovodnom (inverznom) smeru:

$I_d \approx -I_{zas}$

gde je: Izas – inverzna struja zasićenja, m–konstanta, čija je vrednost za Si jednaka 2, Ut – temperaturni napon $U_t = kT/e = 86{,}2 \cdot 10^{-6}$ *(k – Bolzmanova konstanta, e - naelektrisanje elektrona, T(K)–temperatura). Za sobnu temperaturu (T=300K) je* $U_t = 26\ mV$.

Statička otpornost diode u provodnom smeru je $R_d = \frac{U_d}{I_d}$, *a dinamička*

$R_d' = \frac{dU}{dI}$. *Disipacija na diodi je* $P_d = U_d I_d$.

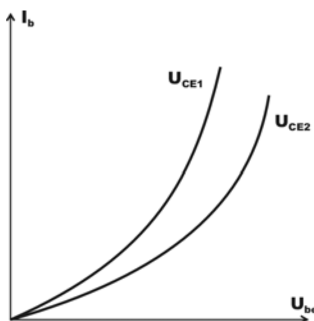
Tranzistori

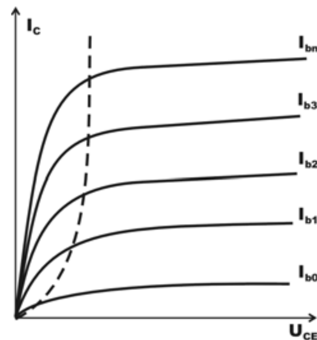
Za opisivanje rada tranzistora kao komponente u električnom kolu potrebno je poznavati vrednosti struja (I_b, I_c *i* I_e) *kao i napona (* U_{be}, U_{ce} *i* U_{bc}). *U ulaznom kolu između baze i emitera postoji napon* U_{be} *usled čega kroz kolo teče struja* I_b. *Između napona na trnzistoru postoji relacija:*

$U_{ce} = U_{cb} + U_{be}$.

Kod tranzistora NPN tipa struje I_b *i* I_c *teku u tranzistor, a struja* I_e *iz trnzistora, tako da između njih postoji relacija:*

$I_b + I_c = I_e$.





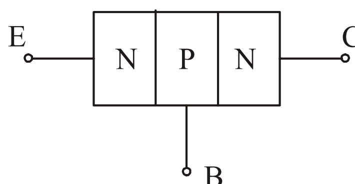
Struja I_{cbo} *kroz inverzno polarisan kolektorski spoj se zbog male vrednosti (potiče od manjinskih nosilaca naelektrisanja) zanemaruje. Napon* U_{be} *je poznat, a napon* U_{ce} *se može izračunati ako je poznata struja kolektora* I_c, *napon izvora i otpornost u kolu kolektora* ($U_{ce} = U_{cc} - R_c I_c$) .

S obzirom na to, za rešavanje kola sa tranzistorom potrebne su još dve nezavisne relacije. Za tranzistor u kolu sa zajedničkim emiterom, koja je data na slici to su:

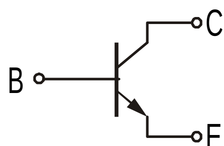
$I_b = I_b(U_{be}, U_{ce})$, *karakteristika baze. Pri grafičkom prikazivanju* U_{ce} *se uzima kao parametar (ulazna karakteristika)* .

$I_c = I_c(U_{ce}, I_b)$, *karakteristika kolektora. Pri grafičkom prikazivanju* I_b *se uzima kao parametar (izlazna karakteristika).*

Bipolarni tranzistor *je celina dva PN spoja sa zajedničkim srednjim slojem (bazom). Spoljašnji slojevi se nazivaju emitor (E) i kolektor (C). Kod tranzistora tipa NPON srednji sloj (oblast) je poluprovodnik P-tipa. Spoljni izvori napajanja kola sa tranzistorima se priključuju tako da je spoj emitera i baze polarisan u direktnom smeru, a spoj kolektora i baze u inverznom smeru.Pošto tranzistor ima tri izvoda postoje i tri različita načina vezivanja u ulazno i izlazno kolo: sa zajedničkim emiterom, zajedničkim kolektorom i zajedničkom bazom. U praksi se koristi najčešće sprega sa zajedničkim emiterom. Sa ovom spregom se postiže i strujno i naponsko pojačavanje ulaznog signala, a ulazna struja (struja baze) je znatno manja od kolektorske (Izlazne) struje.Za korišćenje tranzistora su značajne sledeće karakteristike:*



- *ulazna,* $I_b=f(U_{be})$ *za* $U_{ce}=const.$
- *izlazna,* $I_c=f(U_{ce})$ *za* $I_b=const.$



Strujno pojačanje tranzistora u sprezi sa zajedničkim emitorem se definiše kao odnos kolektorske i bazne struje

$$\beta=\frac{I_c}{I_b}$$

Ispravljači i regulacija snage potrošača

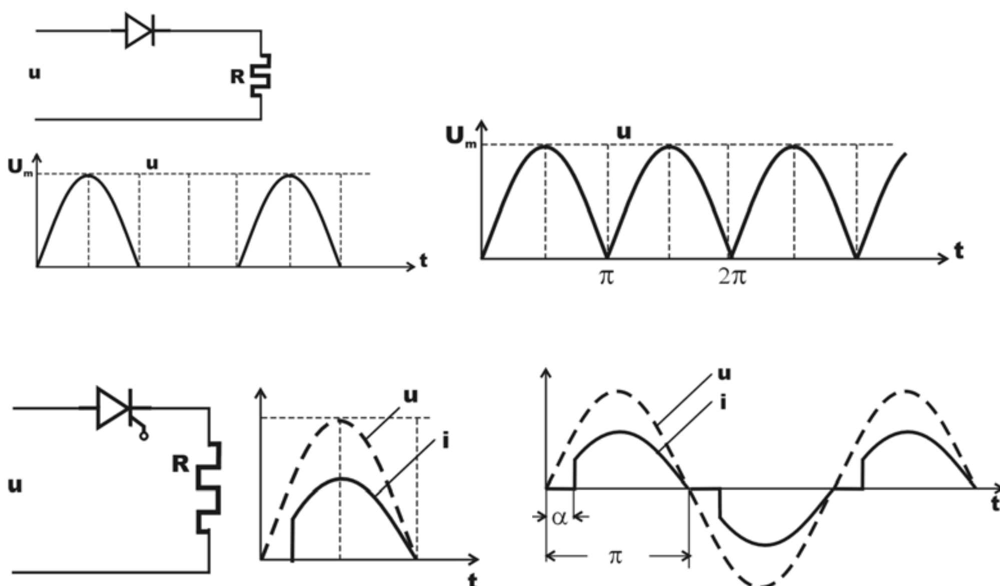
- ***Srednja i efektivna vrednost veličine koja se vremenski menja***

$$X_s=\frac{1}{t_2-t_1}\int_{t_1}^{t_2}x(t)dt \quad , \quad X_{eff}=\sqrt{\frac{1}{t_2-t_1}\int_{t_1}^{t_2}x^2(t)dt} \quad .$$

Pri polutalasnom ispravljavljanju periodične struje preko poluprovodničke diode srednja i efektivna vrednost struje su:

$$U_s=\frac{1}{T}\int_0^T U_m\sin\omega\cdot tdt=\frac{U_m}{\pi} \qquad I_s=\frac{U_s}{R}=\frac{U_m}{R\pi} \quad ,$$

$$Uef=\sqrt{\frac{1}{T}\int_0^T U_m^2\sin^2\omega\cdot tdt}=\frac{U_m}{2\sqrt{2}} \ , \ Ieff=\frac{U_{eff}}{R}=\frac{U_m}{R\sqrt{2}} \quad .$$



Pri ispravljanju korišćenjem dioda u Grez-ovom spoju srednja i efektivna vrednost su:

$$U_s = \frac{2U_m}{\pi} \;,\; I_s = \frac{2U_m}{R\pi} \;,\; U_{eff} = \frac{U_m}{\sqrt{2}} \;,\; I_{eff} = \frac{U_m}{R\sqrt{2}} \;.$$

U kolu sa triakom i potrošačem otpornost R i uglu paljenja α, srednje i efektivne vrednosti napona i struje su:

$$U_s = \frac{U_m}{\pi}(1+\cos\alpha) \;,\; I_s = \frac{U_s}{R} \;,\; U_{eff} = \frac{U_m}{\pi}\left(\pi - \alpha + \frac{1}{2}\sin 2\alpha\right) \;,\; I_{eff} = \frac{U_{eff}}{R}$$

6.1 Statička karakteristika diode $I_d = f(U_d)$, koja je redno vezana sa otpornikom $R = 20\Omega$ i priključena na izvor ems $E = 6V$, data je tabelarno.Odrediti jačinu struje I_1 kroz kolo i disipaciju na diodi. Kolika je efektivna vrednost prostoperiodičnog napona $U_{ab}(f = 50Hz)$, koji treba priključiti umesto izvora E da bi maksimalna vrednost struje kroz kolo bila $I_m = 2I_1$.

REŠENJE:

Kolo izvora E sa rednom vezom otpornika R i diode je nelinearno. Jačina struje kroz kolo se određuje iz položaja radne tačke koja se nalazi u preseku radne prave:

$$U = E - R \cdot I = 6 - 20 \cdot I$$

i statičke karakteristike diode $I = F(U)$, koja je tabelarno data.

Na slici su prikazani dijagrami radne prave, karakteristike diode kao i položaj radne tačke $A(I_1, U_d)$. Na osnovu koordinata radne tačke nalazimo da je struja

kroz kolo $I_1 = 0{,}3A$, a napon na diodi $U_d = 0{,}7V$, pa je disipacija na diodi $P_d = U_d \cdot I_d = 0{,}21W$. Amplituda struje kroz kolo kada je priključeno na napon U_{ab} je:

$$I_m = \frac{U_m}{R + R_d} = 2 \cdot I_1$$

$$U_m = I_m (R + R_d^{'})$$

R_d'–otpornost diode pri struji $I=2I_1$.
Sa dijagrama nalazimo da je pri struji I napon na diodi
U_d' =1V

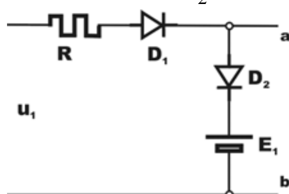
$$R_d^{'} = \frac{U^{'}}{2 \cdot I_1} = 1{,}7\Omega$$

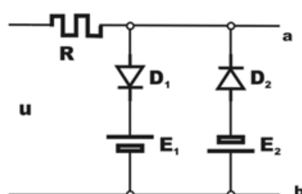
$$U_m = 2I_1\left(R + R_d^{'}\right) = 13{,}02 \text{ V}$$

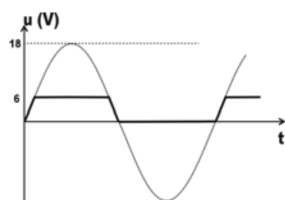
$$U_{eff} = \frac{U_m}{\sqrt{2}} = 0{,}709 \cdot U_m = 18{,}4 \text{ V} .$$

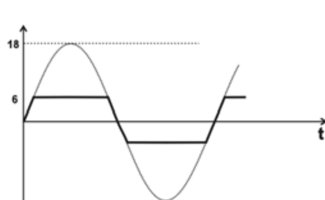
6.2 Na ulaze kola prikazanih na slici dovodi se prostoperidičan napon $u = 12 sin 314t(V)$. Pretpostavljajući da su diode D_1 i D_2 idealne, skicirati napone između tačaka a i b na izlazima kola.

REŠENJE:
a) S obzirom da je dioda D_1 polarisana u propusnom smeru za vreme pozitivne poluperiode, za vreme negativne poluperiode napon na izlazu je $u = 0V$. Međutim, kada napon sa ulaza premaši vrednost $u \succ E_1 = 6V$ dioda D_2 je polarisana u direktnom smeru, izvor E_1 se ponaša kao prijemnik i izlazni napon ima vrednost $u_2 = 6V$.









a) b)

b) Za vreme pozitivne poluperiode dioda D_2 je polarisana u inverznom smeru. Kada ulazni napon premaši vrednost $u \succ E_1 = 5V$, dioda D_1 postaje polarisana u direktnom smeru, provodi struju i s obzirom da je njena otpornost zanemarljiva, napon na izlazu ne premašuju vrednost $u = E_1 = 5V$. Za vreme negativne poluperiode dioda D_1 je inverzno polarisana, a dioda D_2 polarisana u direktnom smeru tek kada ulazni napon opadne ispod vrednosti $u \prec E_1 = -7V$ u, pa izlazni napon zadržava vrednost $u = -7V$ sve dok ulazni napon ne poraste do $u \succ E_2$.

6.3 Za koju će vrednost napona polarizacije inverzna struja kroz diodu sa površinskim P-N spojem dostići 90% od vrednosti struje zasićenja na sobnoj temperaturi? Kolika je struja kroz diodu pri direktnoj polarizaciji izračunatog napona?

REŠENJE:

Karakteristika diode aproksimira se izrazom:

$$I_D = I_S\left(e^{\frac{e}{KT}\cdot U_D} - 1\right)$$

Za sobnu temperaturu je

$$\frac{e}{KT} \approx 40\left[\frac{1}{V}\right]$$

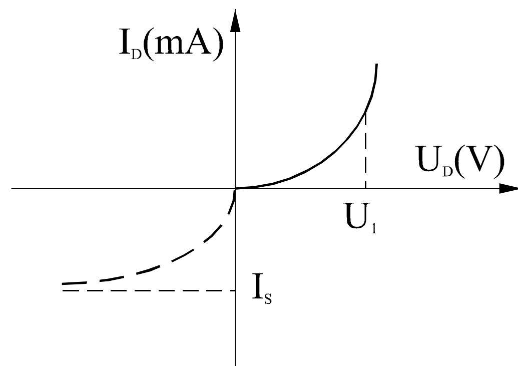
U tom slučaju je:

$$I_1 = -0{,}9 I_S\left(e^{40\cdot U_1} - 1\right)$$

$$U_1 = \frac{ln(0{,}1)}{40} \approx -60[mV]$$

$$U_2 = |U_1| = \frac{ln10}{40}$$

$$I_2 = I_S\left(e^{40\frac{ln10}{40}} - 1\right) = I_S(10-1) = 9I_S$$



6.4 Za diodu sa površinskim spojem čija je inverzna struja zasićenja $I_S = 10\mu A$ izračunati struje i otpore diode za jednosmernu struju koje odgovaraju naponima spojeva:

a) $U_1 = 0{,}1V$

b) $U_1 = 0{,}3V$

REŠENJE:

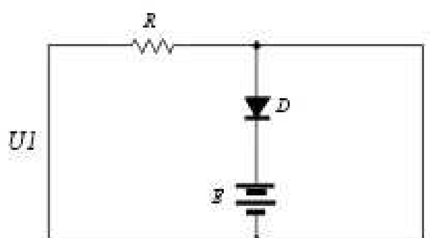
a)
$$I_D = I_S\left(e^{\frac{e}{KT}U_1} - 1\right) = 10\cdot10^{-6}\left(e^{40\cdot0,1} - 1\right) = 10\cdot10^{-6}\left(e^{4} - 1\right) = 0,53mA$$
$$R_D = \frac{U_D}{I_D} = \frac{0,1}{0,53\cdot10^{-3}} = 186\Omega$$

b)
$$I_D = 10\cdot10^{-6}\left(e^{40\cdot0,3} - 1\right) = 1,6A$$
$$R_D = \frac{U_D}{I_D} = \frac{0,3}{1,6} = 0,18\Omega$$

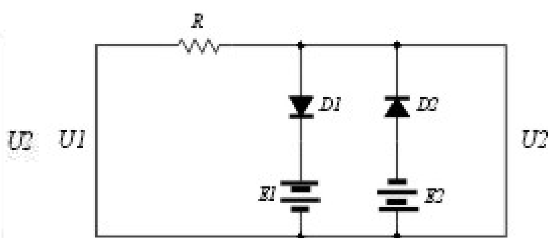
6.5 Za kolo na slici nacrtati:

a) $U_2 = f(U_1)$

b) Ako je $U_1 = \sqrt{2}\,sin\,\omega t$ skicirati $U_2 = f(t)$



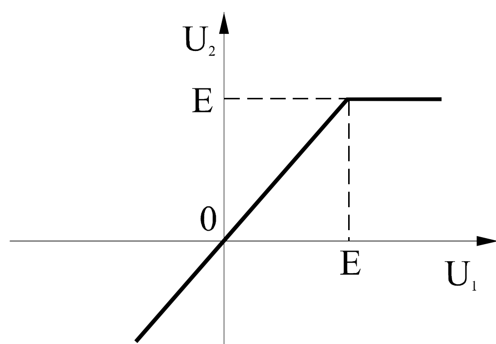
a)

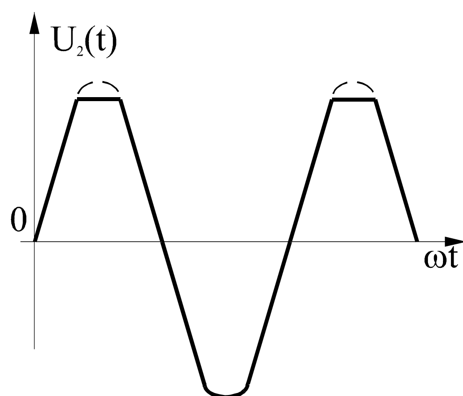


b)

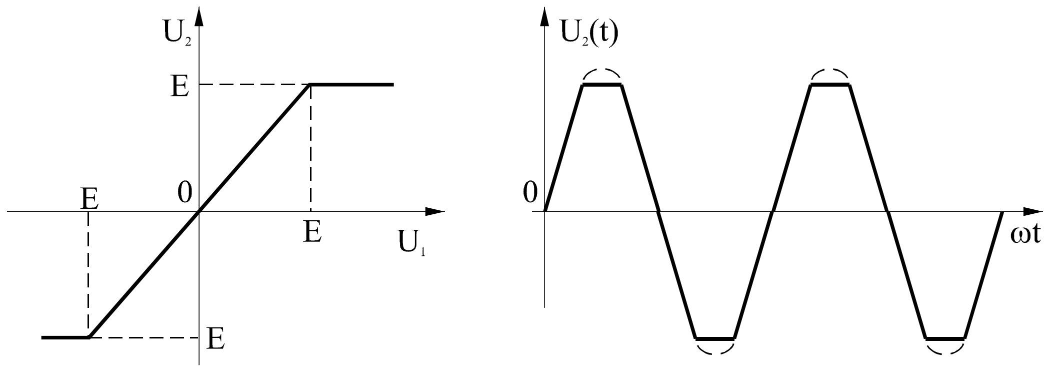
REŠENJE:

Karakteristike $U_2 = f(U_1)$ i $U_2 = f(t)$ za kolo na slici pod a) su:

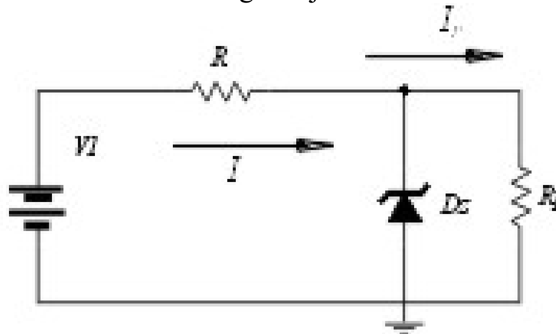




Karakteristike $U_2 = f(U_1)$ i $U_2 = f(t)$ za kolo na slici pod b) su:



6.6 Zener dioda ima konstantan inverzni napon $U_Z = 50V$ u opsegu struja $5 - 50mA$. Ako je napon napajanja $E = 250V$ izračunati vrednost rednog otpora R tako da se struja kroz prijemnik može regulisati u opsegu $I_P = 0$ do $I_P = I_{P max}$. Odrediti $I_{P max}$. Za $I_P = 20mA$ i već izračunatu vrednost otpora R izračunati granice E pod uslovom da napon na prijemniku ostane unutar regulacije.



Za $I_P = 0$, $R_P \to \infty$ sva struja prolazi kroz diodu pa je:

$$R = \frac{E - U_P}{I_{D max}} = 4k\Omega \quad (U_P = U_Z)$$

6.7 Statička karakteristika diode I_d=f (U_d), koja je redno vezana sa otpornikom R=20Ω i priključena na izvor ems E=6 V, data je tabelarno.
Odrediti jačinu struje I_1 kroz kolo i disipaciju na diodi. Kolika je efektivna vrednost prostoperiodičnog napona U_{ab} (f=50 Hz), koji treba priključiti umesto izvora E da bi maksimalna vrednost struje kroz kolo bila I_m=$2I_1$.

REŠENJE: Kolo izvora E sa rednom vezom otpornika R i diode je nelinearno. Jačina struje kroz kolo se određuje iz položaja radne tačke koja se nalazi u preseku radne prave:

$$U = E - R \cdot I = 6 - 20 \cdot I$$

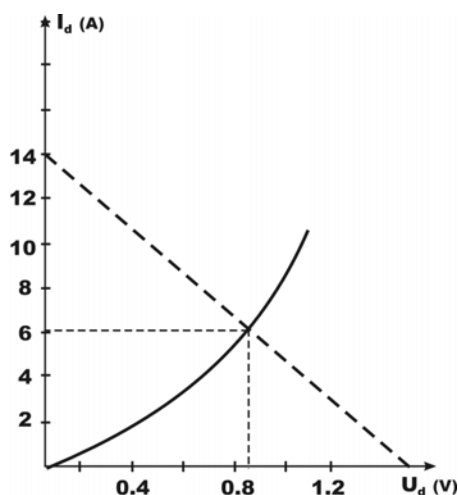
i statičke karakteristike diode I=F (U), koja je tabelarno data.

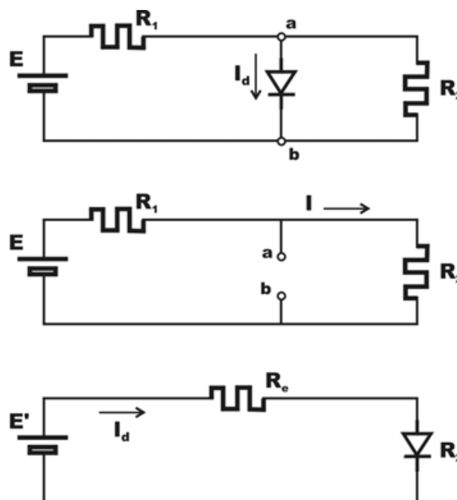
Na slici su prikazani dijagrami radne prave, karakteristike diode kao i položaj radne tačke A (I_1,U_d). Na osnovu koordinata radne tačke nalazimo da je struja kroz kolo I_1=0,3A, a napon na diodi U_d=0,7 V, pa je disipacija na diodi P_d=Ud·Id=0,21 W . Amplituda struje kroz kolo kada je priključeno na napon U_{ab} je:

$I_m = \frac{U_m}{R+R_d} = 2\cdot I_1$, pa je $U_m = I_m(R+R_d^{'})$, gde je R_d'−otpornost diode pri struji I=2I_1.

Sa dijagrama nalazimo da je pri struji I napon na diodi U_d' =1V, pa je $R_d^{'} = \frac{U^{'}}{2\cdot I_1} = 1{,}7\Omega$, a $U_m = 2I_1\left(R+R_d^{'}\right) =$ 13,02 V, a efektivna vrednost $U_{eff} = \frac{U_m}{\sqrt{2}} = 0{,}709\cdot U_m = 18{,}4$ V .

6.8 U kolu čija je šema prikazana na slici dato je E=2,1V, R_1=150 Ω, R_2=560 Ω i statička karakteristika I_d=f (U) diode. Odrediti struju u grani sa diodom i napon na izvodima diode.





REŠENJE:

Prema Tevenenovoj teoremi struja kroz granu kola sa diodom je:

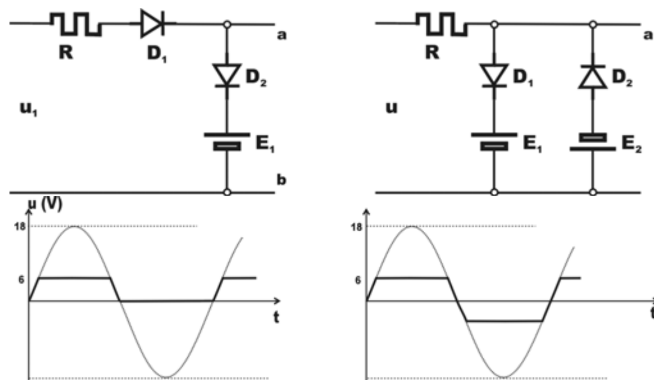
$I_d = \frac{(U_{ab})_o}{R_d + R_e}$, odakle je $(U_{ab})_o = R_d I_d + R_e I_d$, gde je

$$(U_{ab})_o = R_2 I = R_2 \frac{E}{R_1 + R_2} = 1{,}66 \text{ V}$$

a ekvivalentna otpornost $R_e = \dfrac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} = 118\Omega$. Posle zamene $\left(U_{ab}\right)_o = E', R_d I_d = U_d$. Ekvivalentna električna šema koja odgovara ovoj jednačini prikazana je na slici . Jednačina radne prave za ovo kolo je:
$U_d = E' - R_e I_d = 1{,}66 - 118 I_d$.
Na dijagramu I_d=f(U_d) isprekidanom linijom prikazana je radna prava.
U preseku statičke karaktereistike I_d=f(U_d) i radne prave je radna tačka A(I_d,U_d).
Sa dijagrama se određuje I_a=7,2 mA, U_d=0,9V .

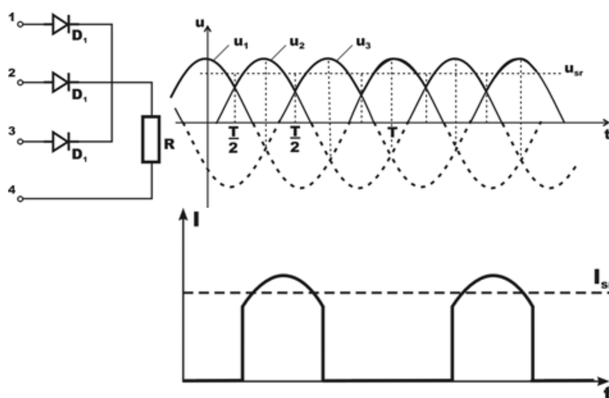
6.9 Na ulaze kola prikazanih na slici dovodi se prostoperidičan napon u=12 sin314t (V). Pretpostavljajući da su diode D_1 i D_2 idealne, skicirati napone između tačaka a i b na izlazima kola.

REŠENJE:
a) S obzirom da je dioda D_1 polarisana u propusnom smeru za vreme pozitivne poluperiode, za vreme negativne poluperiode napon na izlazu je u=0 V. Međutim, kada napon sa ulaza premaši vrednost u>E_1=6V dioda D_2 je polarisana u direktnom smeru, izvor E_1 se ponaša kao prijemnik i izlazni napon ima vrednost u_2=6 V.



b) Za vreme pozitivne poluperiode dioda D_2 je polarisana u inverznom smeru. Kada ulazni napon premaši vrednost u>E_1=5 V, dioda D_1 postaje polarisana u direktnom smeru, provodi struju i s obzirom da je njena otpornost zanemarljiva, napon na izlazu ne premašuju vrednost u=E_1=5V. Za vreme negativne poluperiode dioda D_1 je inverzno polarisana, a dioda D_2 polarisana u direktnom smeru tek kada ulazni napon opadne ispod vrednosti u<E_2= −7V, pa izlazni napon zadržava vrednost u= −7V sve dok ulazni napon ne poraste do u>E_2 .

6.10 Trofazni polutalasni ispravljač, prema šemi prikazanoj na slici priključen je na trofazni sistem napona 220/380 V,50Hz. Otpornost struje kroz potrošač je R=30 Ω. Odrediti srednju vrednost struje kroz potrošač, srednju vrednost struje kroz jednu diodu kao i maksimalnu vrednost inverznog napona na diodama. Skicirati oblike struje kroz jednu diodu.



REŠENJE: Električna šema ispravljača i talasni oblik napona na potrošaču prikazani su na slici. Dioda D_1 je polarisana u propusnom smeru u intervalu t_1=-T/6 do t_2=T/6 kada je $u_1(t)> u_2(t)$ i $u_1(t)> u_3(t)$. Isto važi i za diode D_2 i D_3 u odgovarajućim vremenskim intervalima .
Ako se zanemari pad napona na diodama koje su polarisane u propusnom smeru, srednja vrednost napona na potrošaču u intervalu t_1=0 s do t_2=T/6 je:

$$U_s = \frac{1}{t_1 - t_2}\int_{t_1}^{t_2} U_m \cos\omega t dt = \frac{1}{\frac{T}{6} - 0}\int_0^{T/6} \cos\omega t dt = \frac{1}{\frac{2\pi}{T}} \frac{U_m}{\frac{T}{6}} \sin\omega t \Big|_0^{T/6} =$$

$$= \frac{3U_m}{\pi}\sin\frac{\pi}{3} = \frac{3\sqrt{2}\cdot 220}{\pi}\sin 60$$

U_s=257,43 V .

Srednja vrednost struje kroz potrošač je $I_{sr} = \frac{U_s}{R} = 8{,}58$ A, a srednja vrednost struje kroz jednu od dioda koja provodi u intervalu od jedne trećine periode je:

$I'_{sr} = \frac{I_s}{3} = 2{,}86$ A .

Grafik vremenske zavisnosti struje prikazan je na .Razlika napona na diodi D3 u intervalu kada ne provodi je:

$$\Delta u = u_1 - u_3 = U_m \cos\omega t - U_m \cos(\omega t + \frac{2\pi}{3}) \ ,$$

$$\Delta u = U_m \cos\omega t(1 - \cos\frac{2\pi}{t}) + U_m \sin\omega t \sin\frac{2\pi}{3} \ .$$

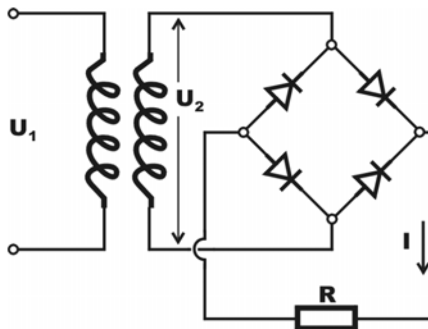
Maksimalna vrednost razlike (u_1-u_3) nalazimo iz uslova:

$\frac{d(\Delta u)}{dt} = 0$, kada je $\omega \cdot t = \frac{\pi}{6}, t = \frac{T}{12}$.

Posle zamene ove vrednosti (u prethodnu jednačinu) dobija se maksimalna vrednost inverznog napona:

$\Delta u_m = 538{,}6$ V , prema kojoj u katalogu za poluprovodničke diode treba izvršiti izbor odgovarajuće diode .

6.11 Potrošač otpornosti R=60 Ω napaja se preko ispravljača sa poluprovodničkim diodama koji je priključen na sekundar transformatora T. Primar transformatora je priključen na mrežu 220V, 50Hz. NaćI odnos transformacije transformatora ako je srednja vrednost struje kroz potrošač I_{sr}=366 mA .



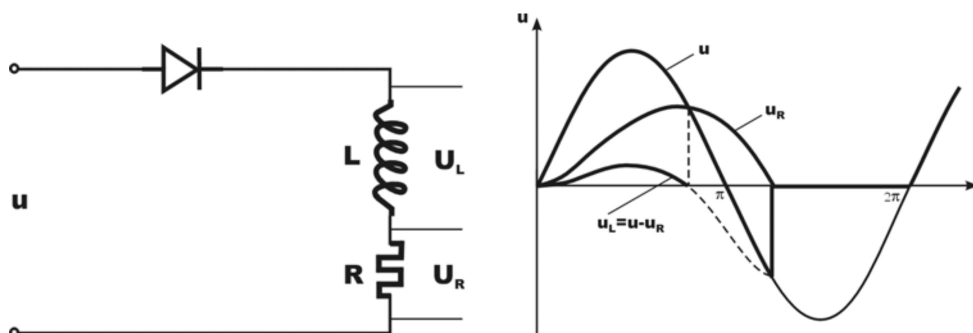
REŠENJE: U slučaju da se kao ispravljač koristi diode vezane u Grecovom spoju srednja vrednost napona na potrošaču je:

$U_{sr} = R \cdot I_{sr} = \frac{2}{\pi} U_m = \frac{2}{\pi} U_2 \sqrt{2}$, gde je U2- napon na sekundaru.

$U_2 = \frac{R \cdot I_{sr}}{2\sqrt{2}} = \frac{60 \cdot 0{,}36 \cdot 3{,}14}{2 \cdot 1{,}41} = 24{,}4$ V , pa je odnos transformacije $n = \frac{220}{24{,}4} = 9$

.

6.12 Impedansa $\overline{Z} = R + j\omega \cdot L$ (Ω) priključena je na napon u=U_m sinωt preko diode D. Ako se zanemari pad napona na diodi u propusnom smeru, odrediti srednju vrednost struje kroz kolo i nacrtati grafik vremenske zavisnosti napona na elementima kola.



REŠENJE: Ako se zanemari pad napona na diodi u propusnom smeru u intervalu kada dioda provodi važi jednačina:

$$u = L\frac{di}{dt} + Ri = U_m \sin\omega t \quad .$$

Rešenje gornje diferencijalne jednačine je:

$$i = i(t) = \begin{cases} \dfrac{U_m}{Z}\left[\sin(\omega t - \varphi) + e^{-\frac{R}{L}t}\sin\varphi\right] \\ 0, \end{cases}$$

gde je $Z = \sqrt{R^2 + (\omega L)^2}$

$$tg\varphi = \frac{L\omega}{R} \quad ,$$

β – se određuje iz uslova u trenutku kada dioda prestaje da provodi $t=t_1= \beta/\omega$, a rešavanjem transcedentne jednačine:

$$\sin(\beta - \varphi) + e^{-\beta\cos\varphi}\sin\varphi = 0 \quad .$$

Srednja vrednost struje kroz kolo se može odrediti iz prve jednačine pri uslovu $I=I_s$ i $u=U_s$:

$$\frac{L}{T}\int_0^T \frac{di}{dt}dt + RI_s = \frac{1}{T}\int_0^T U_m \sin\omega \cdot tdt \quad .$$

Pošto je funkcija periodična, integral na levoj strani jednačine je:

$$\frac{L}{T}\int_0^T di = i(T) - i(0) = 0 \quad .$$

Integral na desnoj strani jednačine je:

$$udt = \int_0^{\beta/\omega} udt + \int_{\beta/\omega}^{T} 0dt = RI \quad \text{, pa je: } RI_s = \frac{1}{T}\int_0^{\beta/\omega} U_m \sin\omega tdt = \frac{U_m}{2}(1 - \cos\beta) \quad ,$$

a srednja vrednost struje kroz kolo:

$$I_s = \frac{U_m}{2\pi \cdot R}\left(1 - \cos\beta\right) \quad .$$

6.13 Pri polutalasnom ispravljanju poluprovodničkom diodom srednja vrednost struje kroz diodu je I=16 A, a snaga kojom se zagreva dioda zbog pada napona na diodi je P=26W. Temperatura ambijenta u kome se nalazi dioda sa hladnjakom je T_a=40°C. Poznati su sledeći podaci:
– maksimalna dozvoljena temperatura p-n spoja je T_j=150° C ,
– termički, toplotni otpr spoja i kućišta diode je R_{tj-k}=1,5° C/W ,
– termički otpor kućišta i hladnjaka R_{tk-h}=0,6° C/W .
Odrediti temperature kućišta i hladnjaka, ako se toplota odvodi preko hladnjaka, kao i dozvoljenu snagu zagrevanja diode bez hladnjaka, ako je termički otpor spoja i ambijenta 50 °C/W .

REŠENJE: Ukupan termički otpor između spoja i ambijenta kod diode sa hladnjakom na kojoj se generiše toplotna snaga P je:

$$R_t = \frac{T_j - T_a}{P} = R_{tj-k} + R_{tk-h} + R_{th-a} = \frac{150-40}{26} = 4{,}2° \text{ C/W}$$

pa je termički otpor između hladnjaka i ambijenta:

$$R_{th-a} = R_t - R_{tj-k} + R_{tk-h} = 4{,}2 - 1{,}5 - 0{,}6 = 2{,}1° \text{ C/W}$$

pa je temperatura kućišta diode:

$$T_k = T_j - P \cdot R_{tj-k} = 10 - 26 \cdot 1{,}5 = 111° \text{ C}$$

a temperatura hladnjaka:

$$T_h = T_k - P \cdot R_{tk-h} = 111 - 26 \cdot 0{,}6 = 95{,}4° \text{ C}$$

Ako se toplota odvodi sa diode bez hladnjaka, a termički itpor između spoja i ambijenta iznosi 50°C/W maksimalna vrednost snage koja se razvija na diodi je:

$$P_{\max} = \frac{T_j - T_a}{R_{tj-a}} = \frac{150-40}{50} = 2{,}2 \text{ W}$$

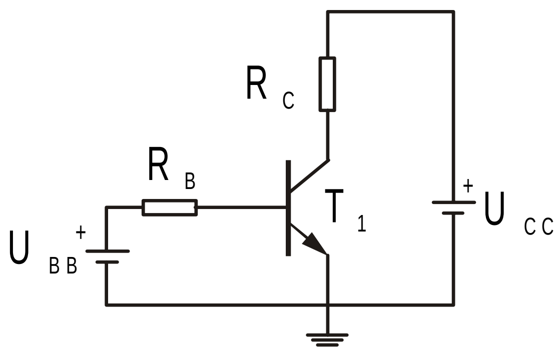
Napomena: Termička otpornost je pored karakteristika materijala zavisna i od površine preko koje se prenosi toplota, tako da je u slučaju kada je dioda bez hladnjaka površina manja, pa termička otpornost između spoja i ambijenta ima veliku vrednost.

6.14 Fotodioda čija je statička karakteristika $I_f(U)$ data na slici , redno je vezana sa otpornikom R=820 kΩ i priključena na napon U=12V. Odrediti napon na otporniku, ako je osvetljenost E=750 lx.

REŠENJE:

Radna tačka kola nalazi se u preseku radne prave $U_f = U - I_f R$ i statičke karakteristike pri osvetljenosti E=750 lx.
Kada se na dijagramu I_f (U_f) konstruiše radna prava $U_f = 12 - 820 \cdot 10^3 I_f$ nalaze se koordinate radne tačke U_f=5V i I_f=9 μA .
Napon na otporniku R je U_R=U-U_f=7V .

6.15 Odrediti I_B, I_E, I_C i U_B za kolo prokazano na slici.



Podaci: $U_{BB} = 3V, U_{CC} = 20V, R_B = 10k\Omega, R_C = 1k\Omega$,a koeficijent strujnog pojačanja upotrebljenog tranzistora iznosi $\beta = 50$.

REŠENJE:

Kako je emiter tranzistora T_1 uzemljen to je $U_E = 0$ pa je napon U_B jednak naponu potencijalne barijere PN spoja $E - B$ koji iznosi $0{,}7V$. Dakle $U_B = 0{,}7V$. Pad napona na otporniku R_B iznosi $U_{BB} - U_B$ pa je

$$I_B = \frac{U_{BB} - U_B}{R_B} = \frac{3(V) - 0.7(V)}{10k\Omega} = 0.23mA$$

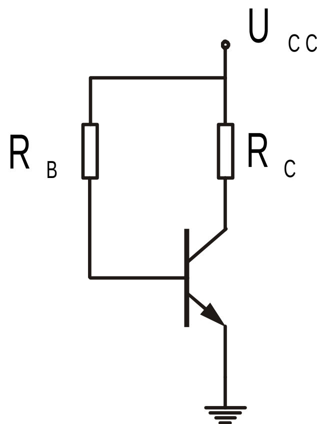
Sada je:

$I_C = \beta \cdot I_B = 50 \cdot 0.23mA = 11.5mA$

$I_E = I_C + I_B = 11.5mA + 0.23mA = 11.73mA$

$U_C = U_{CC} - I_C \cdot R_C = 20V - 11.73mA \cdot 1k\Omega = 8.5V$

6.16 U podacima proizvođača za tranzistor 2N3904 navedeno je da se koeficijent strujnog pojačanja β menja od 100 do 300. Ako je navedeni tranzistor upotrebljen u kolu na slici izračunati minimalnu i maksimalnu kolektorsku struju.



Podaci su:

$U_{CC} = 12V, R_C = 2k\Omega, R_B = 1M\Omega$

REŠENJE:

Spoj baza emiter je direktno polarisan pa je na njemu pad napona od $0{,}7V$.
Pad napona na R_B je

$U_{RB} = U_{CC} - U_{BE} = 12 - 0.7 = 11.3V$

Struja baze je $I_B = \frac{U_{RB}}{R_B} = \frac{11.3}{1} = 11.3\mu A$

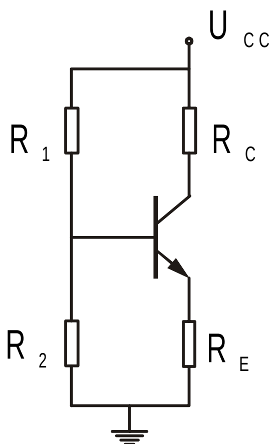
Struja kolektora je β puta veća od bazne struje pa je minimalna struja kolektora:

$I_{C(MIN)} = \beta_1 I_B = 100 \cdot 11.3\mu A = 1.13mA$

a maksimalna struja

$I_{C(MAX)} = \beta_2 I_B = 300 \cdot 11.3\mu A = 3.39mA$

6.17 Za kolo na slici odrediti U_B, U_E, I_B i U_{CE}.



Podaci su: $R_1 = 27k\Omega, R_2 = 3{,}9k\Omega, R_C = 2{,}7k\Omega, R_E = 470\Omega, U_{CC} = 18V$

REŠENJE:

Napon baze nalazimo pomoću razdelnika napona R_1, R_2

$$U_B = \frac{R_2}{R_1 + R_2} U_{CC} = \frac{3.9k\Omega}{27k\Omega + 3.9k\Omega} \cdot 1.8V = 2.27V$$

Emiterski napon je manji od napona baze za pad napona na direktno polarisanom PN spoju koji čine emitor i baza

$$U_E = U_B - U_{BE} = 2.27V - 0.7V = 1.57V$$

Emitersku struju nalazimo primenom Omovog zakona

$$I_E = \frac{U_E}{R_E} = \frac{1.57V}{470\Omega} = 3.34mA$$

a koristeći izraz $I_C \cong I_E$, $I_C 3.34mA$
Kolektorski napon je $U_C = U_{CC} - I_C R_C = 18V - 3.34mA \cdot 2.7k\Omega = 8.98V$
a napon kolektor-emitor

$$U_{CE} = U_C - U_B = 8.98V - 1.57V = 7.41V$$

6.18 Otpornost NTC otpornika se u zavisnosti od temperature menja prema zakonu $R(T) = a \cdot e^{\frac{b}{T}}$. Na temperaturi od 100°C otpornost je 1Ω, a na temperaturi

0°C otpornost iznosi 100Ω. Odrediti promenu otpornosti od temperature i relativnu promenu otpornosti od temperature i relativnu promenu otpornosti sea temperaturu ambijenta od 50°C .

REŠENJE: Vrednosti koeficijenata a i b se određuju rešavanjem sistema jednačina:

$$R_{T_1} = a \cdot e^{\frac{b}{T_1}} \text{ i } R_{T_2} = a \cdot e^{\frac{b}{T_2}} \quad ,$$

gde je R_{T1}=1Ω ,R_{T2}=100Ω , T_1=373 K I T_2=273K .

Rešavanjem sistema jednačina nalazi se da je:

$$b = \ln\frac{R_2}{R_1}\left(\frac{1}{T_2} - \frac{1}{T_1}\right)^{-1} = 4690 \text{ K}, \quad a = \frac{R_1}{e^{\frac{b}{T_1}}} = 3{,}5 \cdot 10^{-6}\Omega \quad .$$

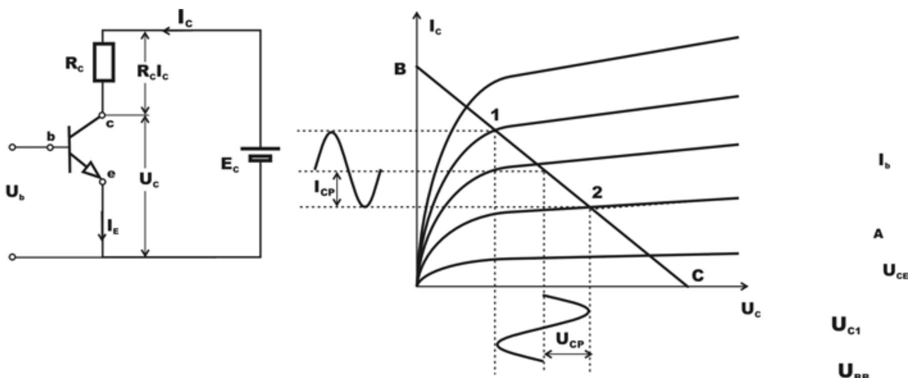
Promena otpora sa temperaturom u okolini radne tačke T=50°C je:

$$\frac{dR}{dT} = -\frac{a \cdot b}{T^2} e^{\frac{b}{T}} = -0{,}16 \cdot 10^{-6} e^{14{,}5} = 0{,}32 \ \Omega/\text{K}$$

a ralativna promena otpornosti sa temperaturom je:

$$\frac{\Delta R}{R}\frac{1}{\Delta T} = \frac{1}{R}\frac{dR}{dT} = -\frac{b}{T^2} = -\ 0{,}045 \ 1/\text{K} \quad .$$

6.19 Izlazne karakteristike tranzistora u kolu pojačavača sa zajedničkim emiterom prikazane su na slici. Pojačavač se napaja iz izvora E_c=40V, a otpornost otpornika u kolu kolektora je R_c=0,5 kΩ .
Ako se struja baze menja prema zakonu $i_b = (60 + 40 \sin \omega \cdot t)$ (μA), odrediti efektivne vrednosti promenljive komponente kolektora struje i napona .
Odrediti pojačanje napona ako se ulazni napon koji je jednak naponu baze menja prema u_b=0,25 sinωt (V) .



REŠENJE:

U polju ulaznih karakteristika I_c= f(U_c) tranzistora, radna prava se crta na osnovu jednačine $U_c = E_c - R_c I_c$. Ordinate tačke B prave se dobijaju iz uslova da je pri I_c=0 napon na kolektoru U_c=E_c=40V. Koordinate tačke C se dobijaju iz uslova da je pri U_c=0 struja $I_c = \frac{E_c}{R_c}$=80 mA. S obzirom da se struja baze I_b menja prema zakonu $I_b = I_{bo} + I_{bp}\sin\omega \cdot t$, gde je I_{bo}=60μ A i I_{bp}=40μ A koordinate tačaka 1 i 2 se dobijaju u preseku radne prave i odgovarajućih karakteristika I_c–U_c sa parametrima I_{bo}+ I_{bp}=100 μA i I_{b0}–I_{bp}=20 μA. Koordinate tačaka 1 i 2 su granične tačke na radnoj pravoj između kojih se menjaju vrednosti promenljivih komponenti struja i napona. Sa grafika se očitavaju vrednosti amplituda struje I_{cp}=20 mA i napona U_{cp}=10V. Odgovarajući analitički izrazi za struju i napon kolekora imaju oblike:

$$I_c = I_{co} + I_{cp}\sin\omega \cdot t = 40 + 20\sin\omega \cdot t \quad \text{(mA)}$$
$$U_c = U_{co} + U_{cp}\sin\omega \cdot t = 20 - 10\sin\omega \cdot t \text{ (V)}$$

Efektivne vrednosti promenljivih komponenti struje i napona na kolektoru određuju se prema:

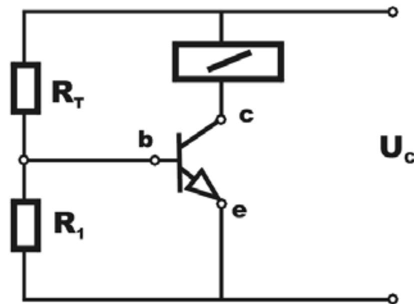
$$I_c^{'} = \frac{I_{cp}}{\sqrt{2}} = \frac{20}{\sqrt{2}} = 14{,}15 \text{ mA} \ \text{, I} \ U_c^{'} = \frac{U_{cp}}{\sqrt{2}} = \frac{10}{\sqrt{2}} = 7 \text{ V}$$

c) Naponsko i strujno pojačanje pojačavača se određuju kao odnosi vrednosti izlazne i ulazne veličine. Na osnovu brojnih vrednosti odgovarajućih veličina, dobijaju se pojačanja promenljivih komponenti napona A_u i strujеA_i :

$$A_u = \frac{U_{cp}}{U_{bp}} = \frac{10}{0{,}25} = 40 \ \text{I} \ A_i = \frac{I_{cp}}{I_{bp}} = \frac{20 \cdot 10^{-3}}{40 \cdot 10^{-6}} = 500$$

pošto se ulazni napon baze menja prema U_b=U_{bp} sinωt=0,25 sinωt .

6.20 Otpornost otpornog prtvarača temperature menja se prema R(T)=$20\cdot10^3$-61,9(T). Ako je napon U=12V, R_2=1kΩ, a strujno pojačanje tranzistora β =100, odrediti temperaturu T pri kojoj dolazi do privlačenja kotve relea (I_c=10 mA) .



REŠENJE: Ako je struja potrebna za privlačenje kotve relea I_c=10 mA, a strujno pojačanje tranzistora β =100, struja baze je:

$$I_b = \frac{I_c}{\beta} = \frac{10 \cdot 10^{-3}}{100} = 0{,}1 \text{ mA}$$

Kako je napon U_{be}=0,6V, struja kroz otpornik R_2 je:

$$I_{R2} = \frac{U_{be}}{R_2} = \frac{0{,}6}{10^3} = 0{,}6 \text{ mA}$$

a struja kroz otporni pretvarač temperature R_T je:

$$I_{RT} = \frac{U - U_{be}}{R_T} = I_b + I_{R2}$$

Vrednosti otpornosti R_T pri datoj temperaturi T može se odrediti na osnovu relacije i iznosi:

$$R_T = \frac{U - U_{be}}{I_{RT}} = \frac{U - U_{be}}{I_b + I_{R2}} = \frac{12 - 0{,}6}{(0{,}1 + 0{,}6)10^{-3}} = 16286\ \Omega$$

S obzirom da se otpornost R_T u zavisnosti od promene temperature menja prema R_T=20· 10^3- 61,9T (Ω), posle zamena vrednosti R_T=16286 Ω , dobija se 16286=20000- 61,9 T , odakle je T=60° C .

Napomena: Rele je naprava koja ima elektromagnet i kontakte. Pri uspostavljanju struje kroz namotaje elektromagneta (u ovom slučau struje I_c=10mA) kotva se pomera i zatvara kontakte koji pripadaju nekom drugom električnom kolu, naprimer kolu naizmenične struje.

7. ***Literatura***

1. *Dragutin N. Mitić,* ***OSNOVI ELEKTROTEHNIKE*** *- Elektrokinetika u obliku metodičke zbirke zadataka, SuperautomatX, Niš, 2001*

2. *dr Aleksandar Vorgučić, dr Dragutin Mitić,* ***OSNOVI ELEKTROTEHNIKE*** *– Elektrostatika u obliku metodičke zbirke zadataka, Naučna knjiga, Beograd, 1988*

3. *Obrad Traparić, akademik Юрий А. Тетерин, dr Labud Vukčević,* ***ZBIRKA ZADATAKA IZ FIZIKE*** *– Elektromagnetizam, Prirodno-matematički fakultet, Podgorica, 2003*

4. *dr Marija Hribšek, mr Dragan Vasiljević, mr Budimir Drakulić,* ***ELEKTRONIKA I*** *– Problemi i rešenja, Naučna knjiga, Beograd, 1984*

5. *dr ing. Nikola Lj. Nikolić, dipl. ing. Suzana Milenović, dipl. ing. Miroslava Cvetković,* ***ELEKTROTEHNIKA*** *– Zbirka zadataka, Novinsko-izdavačka ustanova SLUŽBENI LIST SFRJ, Beograd, 1980*

6. *dr Nikola Nikolić, mr Boban Milošević –* ***ZBIRKA ZADATAKA IZ OSNOVA ELEKTROTEHNIKE ZA MAŠINSKE ŠKOLE*** *- Zavod za udžbenike i nastavna sredstva, Beograd, 1994*